# Applicazione della trasformata di Laplace

## Formula generale per la trasformata

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

## Esempio concreto: *sin*x

$$L[\sin t] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt$$

Analizziamo l'integrale per parti. Definiamo l'esponenziale come funzione *a*, mentre sint sarà per noi la derivata di (-cost).

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = -\cos t \cdot e^{-st} - \int_0^{+\infty} (-\cos t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = -\cos t \cdot e^{-st} - \int_0^{+\infty} s \cdot \cos t \cdot e^{-st} dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = -\cos t \cdot e^{-st} - s \int_0^{+\infty} \cos t \cdot e^{-st} dt$$

Integriamo nuovamente per parti, utilizzando i criteri precedentemente imposti.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = -\cos t \cdot e^{-st} - s\left( e^{-st} \cdot \sin t - \int_0^{+\infty} (-s) \cdot e^{-st} \sin t dt \right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = -\cos t \cdot e^{-st} - s\left( e^{-st} \cdot \sin t + s \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt \right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = -\cos t \cdot e^{-st} - s \cdot e^{-st} \cdot \sin t - s^2 \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt$$

Ora portiamo entrambi i membri dell'equazione a primo membro e semplifichiamo.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = -\cos t \cdot e^{-st} - s \cdot e^{-st} \cdot \sin t - s^2 \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt$$

$$\left( \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt \right) + s^2 \left( \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt \right) = -\cos t \cdot e^{-st} - s \cdot e^{-st} \cdot \sin t$$

$$\left(1 + s^2\right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt \right) = -\cos t \cdot e^{-st} - s \cdot e^{-st} \cdot \sin t$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = \frac{-\cos t \cdot e^{-st} - s \cdot e^{-st} \cdot \sin t}{1 + s^2}$$

Abbiamo trovato la primitiva della nostra funzione, ora dobbiamo valutarla agli estremi dell'intervallo di integrazione.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = \left[ \frac{-\cos t \cdot e^{-st} - s \cdot e^{-st} \cdot \sin t}{1 + s^2} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +\infty} \left[ \left( \frac{-\cos \varepsilon \cdot e^{-s\varepsilon} - s \cdot e^{-s\varepsilon} \cdot \sin \varepsilon}{1 + s^2} \right) - \left( \frac{-\cos 0 \cdot e^{-s0} - 0 \cdot e^{-s0} \cdot \sin 0}{1 + s^2} \right) \right]$$

Il primo addendo tende a zero, in quanto l'esponenziale tende a zero per *x* che tende a meno infinito. Il secondo membro è invece risolvibile con la sostituzione del valore zero alle funzioni trigonometriche richieste:

$$\boxed{L\left[f\left(t\right)\right] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = \frac{1}{1+s^2}}$$

**Andrea Asta**