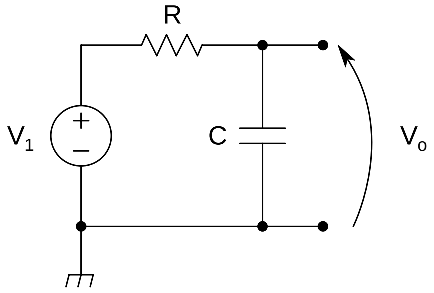
Analisi del Circuito RC

Il circuito RC è formato da un generatore di tensione, una resistenza ed un condensatore in serie.



Il corrente in circolo sulla resistenza e sul condensatore è la stessa. L'uscita del nostro circuito è la caduta di tensione sul condensatore. Una volta che il circuito è alimentato, il condensatore C inizierà a caricarsi verso V_1. Nostro obiettivo è determinare la legge che descrive l'andamento di carica del condensatore in funzione del tempo.

La corrente in circolo, vale, per ogni istante di tempo:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_o(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Applicando la seconda legge di Kirchhoff si ha inoltre:

$$V_1 = R \cdot i(t) + v_o(t) \tag{2}$$

Da cui, sostituendo la (1) nella (2), si ha

$$V_1 = R \cdot C\frac{\mathrm{d}v_o(t)}{\mathrm{d}t} + v_o(t)$$

Il prodotto RC assume il nome di **costante di tempo** del circuito e si indica con la lettera greca τ .

$$\tau = R \cdot C \tag{3}$$

Nella (2), dividiamo ambo i membri per τ .

$$\frac{V_1}{\tau} = \frac{\mathrm{d}v_o(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_o(t)}{\tau} \tag{4}$$

A questo punto possiamo *L-Trasformare* il circuito:

$$\begin{gathered}
\mathrm{L}\left[\frac{V_1}{\tau}\right] = \mathrm{L}\left[\frac{\mathrm{d}v_o(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_o(t)}{\tau}\right] \\
\frac{V_1}{\tau \cdot s} = \left(sV_o(s) - V_o(0)\right) + \left(\frac{1}{\tau}V_o(s)\right)\mathrm{L}\left[\frac{V_1}{\tau}\right] = \mathrm{L}\left[\frac{\mathrm{d}v_o(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_o(t)}{\tau}\right] \\
\frac{V_1}{\tau \cdot s} = sV_o(s) - V_o(0) + \frac{1}{\tau}V_o(s)
\end{gathered} \tag{5}$$

Separiamo adesso l'uscita dagli altri addendi:

$$\frac{V_1}{\tau \cdot s} = sV_o(s) - V_o(0) + V_o(s)$$
$$V_o(s) \cdot \left(s + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{V_1}{\tau \cdot s} + V_o(0)$$
$$V_o(s) \cdot \left(\frac{1 + \tau \cdot s}{\tau} \right) = \frac{V_1 + \tau \cdot s \cdot V_o(0)}{\tau \cdot s}$$

da cui

$$V_o(s) = \frac{\dfrac{V_1 + \tau \cdot s \cdot V_o(0)}{\tau \cdot s}}{\dfrac{1 + \tau \cdot s}{\tau}} =$$
$$= \frac{V_1 + \tau \cdot s \cdot V_o(0)}{\tau \cdot s} \cdot \frac{\tau}{1 + \tau \cdot s} = \frac{V_1 + \tau \cdot s \cdot V_o(0)}{s(1 + \tau \cdot s)}$$

Spezzando la frazione si ha

$$V_o(s) = \frac{V_1}{s(1 + \tau \cdot s)} + \frac{\tau \cdot s \cdot V_o(0)}{s(1 + \tau \cdot s)} =$$
$$= V_1 \frac{1}{s(1 + \tau \cdot s)} + \tau \cdot V_o(0) \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$$

Per antitrasformare facilmente i due addendi, è necessario che i denominatori delle frazioni assumano la forma $s + k$. Per fare ciò, dividiamo numeratore e denominatore per la costante di tempo:

$$V_o(s) = V_1 \frac{\dfrac{1}{\tau}}{\dfrac{s(1 + \tau \cdot s)}{\tau}} + \tau \cdot V_o(0) \frac{\dfrac{1}{\tau}}{\dfrac{1 + \tau \cdot s}{\tau}} =$$
$$= \frac{V_1}{\tau} \frac{1}{s\left(s + \dfrac{1}{\tau} \right)} + \frac{\tau}{\tau} \cdot V_o(0) \frac{1}{s + \dfrac{1}{\tau}} = \frac{V_1}{\tau} \frac{1}{s\left(s + \dfrac{1}{\tau} \right)} + V_o(0) \frac{1}{s + \dfrac{1}{\tau}} \qquad (6)$$

A questo punto, ricordando che

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s + a)} \right] = \frac{1 - e^{-at}}{a}$$
$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + a} \right] = e^{-at}$$

possiamo procedere con l'antitrasformazione di entrambi i membri.

$$\mathrm{L}^{-1}[V_o(s)] = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{V_1}{\tau}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} + V_o(0)\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right]$$

$$v_o(t) = \frac{V_1}{\tau}\frac{1-e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{\tau}} + V_o(0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_1}{\tau}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\tau + V_o(0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \qquad (7)$$

$$= V_1\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + V_o(0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = V_1 - V_1\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + V_o(0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A questo punto, raccogliendo a fattor comune, si ha

$$\begin{aligned} v_o(t) - V_1 &= -V_1\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + V_o(0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_o(t) - V_1 &= e^{-\frac{t}{\tau}}\left(V_o(0) - V_1\right) \end{aligned} \qquad (8)$$

Se moltiplichiamo per (-1) ambo i membri, e indichiamo con V_{finale} la tensione a cui tende a caricarsi il condensatore (ossia V_1) e con $V_{iniziale}$ la tensione a cui è caricato il condensatore all'inizio dell'analisi (ossia $V_o(0)$), possiamo scrivere:

$$V_1 - v_o(t) = (V_1 - V_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (9)$$

Quest'ultima formula descrive, in generale, l'andamento **esponenziale** della carica (ma anche della scarica) di un condensatore, posto all'interno di un gruppo RC.

Andrea Asta