

**Relazione di Elettronica**

# **AMPLIFICATORI OPERAZIONALI**

**APPLICAZIONI LINEARI**

Sabato 30 settembre 2006

**Andrea Asta**

# Autore del fascicolo

Nome	Andrea Asta
Sito Web	www.andrea-asta.com
Email	asta.andrea@tin.it
Classe	5A INFO

# Sommario

<b>Autore del fascicolo</b> .....	<b>2</b>
<b>Sommario</b> .....	<b>2</b>
<b>1. Introduzione</b> .....	<b>3</b>
1.1 Titolo della prova.....	3
1.2 Descrizione della prova.....	3
<b>2. Strumentazione e Materiale utilizzati</b> .....	<b>3</b>
2.1 Strumentazione.....	3
2.2 Materiale .....	3
2.3 Software .....	3
<b>3. Parte teorica</b> .....	<b>4</b>
3.1 Amplificatori operazionali .....	4
3.2 Comparatore.....	7
3.3 Configurazioni ad anello chiuso .....	7
3.4 Configurazione invertente.....	8
3.5 Configurazione non invertente ed Inseguitore .....	9
3.6 Trasformata di Laplace per l'analisi circuitale .....	10
3.7 Derivatore ideale .....	13
3.8 Derivatore reale.....	16
3.9 Integratore ideale.....	17
3.10 Integratore reale .....	19
<b>4. Parte pratica</b> .....	<b>21</b>
4.1 Circuiti integrati per gli Amplificatori Operazionali .....	21
4.2 Descrizione della prova.....	21
4.3 Analisi dei parametri di base.....	22
4.4 Misura dello Slew Rate .....	25
4.5 Testing di Derivatore ed Integratore .....	27
<b>5. Conclusioni</b> .....	<b>33</b>
5.1 Conclusioni della prova .....	33
5.2 Trafiletto in inglese .....	34
<b>6. Appendici</b> .....	<b>35</b>
6.1 Trasformata di Laplace .....	35
6.2 Segnali di prova .....	37
6.3 Applicazioni lineari degli amplificatori operazionali .....	38
6.4 Coppia resistiva per guadagni prefissati .....	40

# 1. Introduzione

## 1.1 Titolo della prova

Verifica delle caratteristiche degli amplificatori operazionali. Analisi delle configurazioni di derivatore ed integratore.

## 1.2 Descrizione della prova

Con questa prova tenteremo di verificare nella pratica le proprietà degli amplificatori operazionali, attraverso il montaggio di circuiti elettronici che ne simulino le principali applicazioni lineari.

In particolare, ci interesseremo alla misurazione dei parametri caratteristici dell'integrato; quindi passeremo al cablaggio ed al testing delle configurazioni invertente, di derivatore e di integratore.

# 2. Strumentazione e Materiale utilizzati

## 2.1 Strumentazione

Per la prova sono state utilizzate le seguenti strumentazioni:

- ❖ Multimetro digitale (8 MITEK MK 1200)
- ❖ Generatore singolo di corrente continua (GW SINGLE DC POWER DF17305B3A)
- ❖ Generatore di funzione GW (GFG-8015G)
- ❖ Oscilloscopio GW (INSTEK GOS-620)

## 2.2 Materiale

Per la prova sono stati utilizzati i seguenti materiali

- ❖ 1 breadboard
- ❖ Filo di rame rigido
- ❖ 1 I.C. LM358 (Amplificatore Operazionale Duale)
- ❖ 1 I.C. TL084 (Amplificatore Operazionale Duale)
- ❖ 1 Resistore E-24 240k $\Omega$
- ❖ 1 Resistore E-24 27k $\Omega$
- ❖ 1 Resistore E-24 120k $\Omega$
- ❖ 1 Resistore E-24 1.2M $\Omega$
- ❖ 1 Resistore E-24 3.9k $\Omega$
- ❖ 1 Resistore E-24 390 $\Omega$
- ❖ 1 Trimmer Resistivo da 200 $\Omega$
- ❖ 1 Condensatore da 10nF
- ❖ 1 Condensatore da 150nF

## 2.3 Software

Per la prova sono stati utilizzati i seguenti software:

- ❖ Multisim 2001 from Electronics Workbench
- ❖ Ottimizzatore della coppia resistiva (vedere Appendici)

## 3. Parte teorica

### 3.1 Amplificatori operazionali

Un amplificatore operazionale è un circuito elettronico analogico in grado di eseguire **operazioni matematiche** sui segnali elettrici.

Normalmente gli amplificatori operazionali si trovano in commercio sotto forma di **circuiti integrati**, con caratteristiche elettriche diverse a seconda della qualità desiderata.

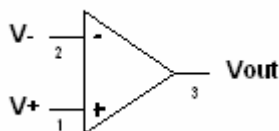


Figura 1: Simbologia dell'amplificatore operazionale

L'amplificatore operazionale ha due tensioni di ingresso e una tensione di uscita.

L'ingresso rappresentato con un segno *meno* (-) è detto **ingresso invertente**, mentre l'altro, caratterizzato da un segno *più* (+), è detto **ingresso non invertente**.

Il circuito dispone inoltre di due secondi ingressi, quelli di **alimentazione**. Rispetto a questo parametro, dividiamo gli amplificatori operazionali in due famiglie:

- Singoli
- Duali

Gli amplificatori **singoli** sono alimentati con una tensione positiva (o negativa, a seconda delle specifiche del singolo componente) e massa. Gli amplificatori **duali** sono invece alimentati con due tensioni contrapposte, una positiva ed una negativa (ad esempio,  $\pm 15V$ ).

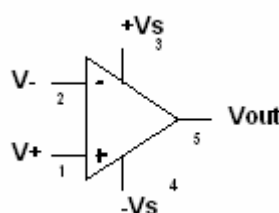


Figura 2: Amplificatore con alimentazione duale in evidenza

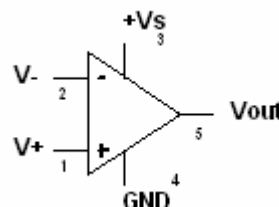


Figura 3: Amplificatore con alimentazione singola in evidenza

La relazione che sussiste tra ingressi ed uscita è espressa dalla formula:

$$V_{OUT} = A_d(V^+ - V^-)$$

La costante (sotto forma di *numero puro*)  $A_d$  è riferita al singolo operazionale ed è chiamata **guadagno differenziale**. Non di rado esso è indicato semplicemente con la lettera  $G$ . Come detto, esso è un numero puro, anche se spesso si preferisce fornirlo in *deciBel*.

Spesso si suole definire la differenza tra gli ingressi con il nome di **tensione differenziale**.

$$V_d = V^+ - V^-$$

Se si sceglie di adottare questa convenzione, la relazione si può esprimere nella forma più compatta

$$V_{OUT} = A_d V_d$$

Il guadagno differenziale, in breve guadagno, è un valore molto elevato, idealmente **infinito**; se gli ingressi sono identici, l'uscita sarà ovviamente nulla, ma se esiste anche solo una leggera differenza tra gli ingressi, si produce una tensione di uscita molto elevata, teoricamente infinita. Vanno tuttavia presi in esame due problemi:

1. Negli amplificatori reali il guadagno non è infinito
2. La tensione di uscita è comunque vincolata all'alimentazione

Il fatto che il guadagno nella realtà non sia infinito non stupisce, in quanto è chiaro che l'infinito non è altro che un'astrazione matematica, rappresentato nella realtà con **numeri molto elevati**. Si ha, generalmente, un valore di guadagno pari a 100000.

$$G \approx 100000$$

Anche il secondo problema, in realtà, non deve stupire più di tanto: mantenendo costante la potenza dell'amplificatore, è impensabile credere che esso sia in grado di fornire una tensione così elevata partendo dal nulla. Se l'amplificatore è alimentato con 5V, ad esempio, non potremo mai pretendere che l'uscita superi questo valore. Nel linguaggio tecnico si usa dire che l'amplificatore è in **saturazione** quando la sua uscita è esattamente quella massima fornibile, e valori maggiori di tensione differenziale non produrrebbero più ripercussioni su di essa.

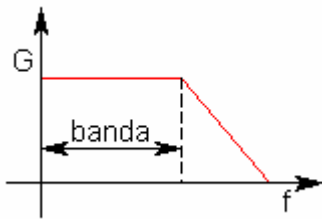
Va tenuto presente che ogni amplificatore operazionale ha un **consumo interno** pari a qualche Volt, di conseguenza il valore di saturazione non sarà uguale al valore di alimentazione, ma al valore di alimentazione sottratto del consumo interno.

$$V_{interna} \approx 1.5V$$

$$V_{out_{MAX}} = V_S - V_{interna}$$

Altro parametro importante è la **larghezza di banda**: supponendo gli ingressi sotto forma di tensioni alternate con frequenza  $f$ , è logico pensare che anche l'uscita debba avere una frequenza uguale a  $f$ . Dal punto di vista ideale, quindi, la larghezza di banda è infinita; nella realtà essa vale qualche MHz, a seconda dell'integrato utilizzato. Se la fre-

quenza in ingresso supera il valore massimo tollerato, si ha un progressivo decadimento del guadagno.



**Figura 4: Larghezza di banda**

Tra gli ingressi è presente una resistenza teoricamente infinita (chiamata **resistenza di ingresso**), in altre parole ai capi dell'ingresso invertente e ai capi di quello non invertente si ha uno stesso potenziale. La **resistenza di uscita** è invece la resistenza che si trova idealmente in serie all'uscita, causando un degrado di quest'ultima: è chiaro che questo valore è quanto più possibile vicino allo zero.

Gli ingressi invertente e non invertente sono trattati in modo leggermente diverso, nel senso che, ad esempio, inserendo agli ingressi due tensioni uguali non è per forza vero che l'uscita sia nulla: il parametro che misura la qualità dell'integrato in questo senso è il **Common Mode Rejection Rate** (CMRR) e deve essere il più alto possibile, idealmente infinito.

Un parametro molto importante è inoltre lo **Slew Rate** (SL), che misura la massima velocità di crescita del segnale di uscita. Esso si può esprimere sia in ampiezza a parità di frequenza che in frequenza a parità di ampiezza. In parole semplici, il parametro indica la velocità massima con cui l'uscita può variare. Essendo una velocità, esso sarà espresso come variazione di ampiezza nell'unità di tempo.

$$SR = \frac{dV}{dt} \left[ \frac{V}{s} \right]$$

Se, ad esempio, il segnale di ingresso deve generare sull'uscita una variazione di 10V in 1 $\mu$ s, è chiaro che lo Slew Rate dell'amplificatore dovrà essere di almeno 10V/ $\mu$ s. Sebbene nel Sistema Internazionale l'unità di misura corretta sia il V/s, nella pratica è più comodo l'utilizzo dell'unità di misura V/ $\mu$ s. L'analisi dello Slew Rate è molto importante, perché, se si tenta di lavorare a velocità più elevate, l'uscita risulta distorta e quindi la prova perde di significato.

Gli amplificatori operazionali sono inoltre caratterizzati da una **tensione di offset**, una costante aggiunta all'uscita. Ogni circuito integrato ha particolari caratteristiche in questo senso: ci sono circuiti con offset molto bassi, altri con offset regolabili dall'esterno. E' chiaro che, se gli ingressi sono uguali, l'uscita sarà esattamente uguale al valore della tensione di offset. Nella maggior parte dei casi, i costruttori di integrati, scelgono di lasciare libera la regolazione dell'offset, oppure cercano di ridurre al minimo il valore di questo parametro, in modo che questa grandezza sia trascurabile.

Riassumendo, la relazione che sussiste tra ingressi ed uscita di un amplificatore operazionale è la seguente:

$$V_{OUT} = A_d(V^+ - V^-) + V_{offset} \quad -V_S + V_{interna} \leq V_{OUT} \leq +V_S - V_{interna}$$

## 3.2 Comparatore

Il primo esempio di utilizzo di un amplificatore operazionale è quello di **comparatore**, detto anche **configurazione ad anello aperto** (*open loop*).

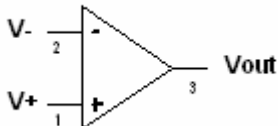


Figura 5: Comparatore

Questo circuito esegue il confronto tra i due segnali di ingresso. Come già visto, il problema principale è che, essendo il guadagno molto elevato, questo circuito saturerà per valori di tensione differenziale anche molto piccole.

## 3.3 Configurazioni ad anello chiuso

Le applicazioni più interessanti degli amplificatori operazionali si hanno quando si riesce in qualche modo a *limitare* il guadagno, e stabilire una **funzione di trasferimento** che leghi ingressi ed uscite. Esistono configurazioni per molte applicazioni matematiche, lineari e non: si va dalle semplici proporzionalità, a somme, differenze, ma anche logaritmi e antilogaritmi, fino ad arrivare a calcoli di analisi, quali derivazione ed integrazione.

La funzione di trasferimento è definita come il rapporto tra uscita ed ingresso, e nel caso degli amplificatori operazionali coincide con il guadagno.

$$f.d.t. = G = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}}$$

Per **limitare il guadagno** ci si serve della tecnica della **retroazione**, ovvero riportare l'uscita verso uno dei due ingressi. In questo modo, a seconda di come è realizzato il circuito esterno all'amplificatore, si possono ottenere le più svariate funzioni di trasferimento, con guadagni limitati.

Ogni circuito elettronico può essere studiato nell'**ambito temporale**, quindi trovando una relazione in funzione del *tempo*, oppure può essere elaborato nel campo complesso attraverso la **trasformata di Laplace**. Quando possibile, si sceglierà di effettuare analisi temporali, visto che sono di comprensione più immediata e forniscono equazioni di comprensione più immediata (se, ad esempio, abbiamo una funzione lineare in Laplace, non è detto che lo sia nell'ambito del tempo).

## 3.4 Configurazione invertente

Il più semplice esempio di configurazione ad anello chiuso è quella **invertente**: l'uscita risulta proporzionale all'opposto dell'ingresso.

Come detto, per realizzare questo circuito, ci si serve di una retroazione negativa, che limiti il guadagno e stabilisca una relazione matematica tra ingresso ed uscita.

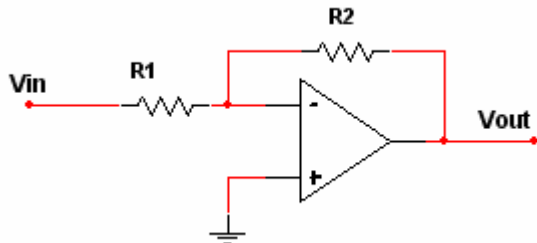


Figura 6: Amplificatore operazionale in configurazione invertente

L'ingresso non invertente è posto a massa: assumendo la resistenza di ingresso infinita, anche all'ingresso invertente avremo un punto di massa, che sarà chiamato **massa virtuale**, perché ha lo stesso potenziale di massa, ma non è fisicamente la massa.

Per il principio della massa virtuale e la legge di Kirchhoff, si può scrivere l'equazione alla maglia dell'ingresso invertente:

$$V_{in} = R_1 I$$

dove  $I$  è la **corrente entrante** nell'amplificatore.

Siccome il punto di massa virtuale non è veramente massa, la corrente rimane in circolo all'interno del circuito: non potendo raggiungere la massa effettiva (dovrebbe attraversare una resistenza *infinita*), essa circherà anche su  $R_2$ . Questa osservazione ci permette di affermare che la corrente in circolo sull'intero circuito è la stessa. A questo punto possiamo anche trovare una relazione per la maglia d'uscita.

$$V_{out} = -R_2 I$$

Il segno meno è giustificato dal fatto che la corrente non è uscente da  $V_{out}$ , bensì, per l'ipotesi e la formula scritta in precedenza, entrante. Per la legge di Kirchhoff, in questo caso dobbiamo anteporre un segno meno.

Dalla prima equazione si ricava che

$$V_{in} = R_1 I \Rightarrow I = \frac{V_{in}}{R_1}$$

Sostituendo questa forma nella seconda equazione si ottiene la relazione tra ingresso ed uscita nell'ambito temporale.

$$V_{out} = -R_2 I = -R_2 \cdot \frac{V_{in}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} V_{in}$$

Come si nota, l'uscita è proporzionale all'opposto dell'ingresso. In particolare, la funzione di trasferimento del sistema (il guadagno dell'amplificatore operazionale) è uguale a:

$$G = -\frac{R_2}{R_1}$$

### 3.5 Configurazione non invertente ed Inseguitore

Un'altra importante configurazione degli amplificatori operazionali è quella **non invertente**: se nella configurazione invertente l'uscita era proporzionale all'opposto dell'ingresso, in questo caso la proporzionalità manterrà inalterato anche il segno del segnale in ingresso.

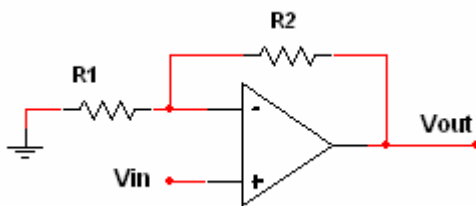


Figura 7: Amplificatore operazionale in configurazione non invertente

All'ingresso non invertente è inviato il segnale di ingresso. Ne consegue che anche sull'ingresso invertente sarà presente questa tensione (per la caratteristica dell'amplificatore di avere resistenza di ingresso infinita). Possiamo inoltre constatare che la caduta sulla resistenza  $R_1$  è, ovviamente, uguale alla tensione di ingresso (legge di Kirchhoff sulla maglia di ingresso).

$$V_{in} = R_1 \cdot I$$

La corrente in circolo in tutto il circuito è sempre uguale in ogni suo punto, infatti l'operazionale non assorbe corrente. Possiamo quindi utilizzare la legge di Kirchhoff sulla maglia di uscita:

$$V_{out} = (R_1 + R_2) \cdot I$$

Dalla prima equazione ricaviamo l'espressione della corrente:

$$V_{in} = R_1 \cdot I \rightarrow I = \frac{V_{in}}{R_1}$$

e la sostituiamo nella seconda equazione:

$$V_{out} = (R_1 + R_2) \cdot I = (R_1 + R_2) \cdot \frac{V_{in}}{R_1} = \frac{V_{in} (R_1 + R_2)}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_{in} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{in}$$

L'uscita dell'amplificatore risulta essere quindi proporzionale all'ingresso, senza alcuna inversione di segno. In particolare, la funzione di trasferimento del sistema è pari a

$$G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Un caso particolare di sommatore invertente si ha quando il guadagno desiderato è unitario: in altre parole, l'uscita deve essere esattamente uguale all'ingresso.

$$G = 1 \rightarrow 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1$$

$$1 + \frac{R_2}{R_1} = 1$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 0$$

$$R_2 = 0$$

Ponendo  $R_2$  uguale a zero, l'uscita è collegata all'ingresso invertente senza resistenze aggiuntive: ne consegue che la corrente in circolo sul circuito è nulla, pertanto anche l'altra resistenza è inutile. Il circuito completo è quindi privo di resistenze e si serve unicamente delle alimentazioni dell'amplificatore.

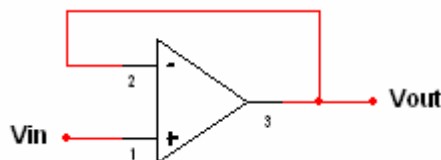


Figura 8: Circuito Inseguitore

Il circuito così modificato prende il nome di **inseguitore** ed è un ottimo circuito per il disaccoppiamento di un segnale, in altre parole è un efficiente buffer, adatto al mantenimento di una tensione costante anche in caso di applicazione di un carico ad un circuito. Infatti il circuito ha una resistenza di ingresso molto elevata (non assorbe corrente) e una resistenza di uscita molto bassa (ne può fornire molta).

## 3.6 Trasformata di Laplace per l'analisi circuitale

Lo strumento matematico della trasformata di Laplace (vedere anche l'appendice) permette di trasformare un'equazione differenziale in una equazione polinomiale fratta, spostandosi dal dominio reale a quello complesso.

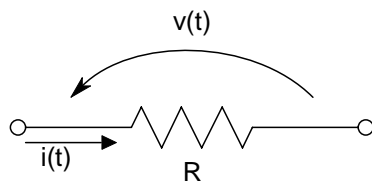
Essendo la trasformata di Laplace un operatore lineare, è possibile applicarla ad entrambi i membri di una qualsiasi equazione e studiare quindi la relazione nel dominio dei numeri complessi. In seguito, se necessario, si potrà utilizzare l'operatore inverso della trasformata,

l'antitrasformata  $L^{-1}$ , per trasformare il risultato ottenuto nell'ambito complesso in un'equazione (eventualmente differenziale) nell'ambito reale del tempo.

La  $L$  – Trasformata assume importanza particolare soprattutto perché permette di trasformare le equazioni differenziali di alcuni componenti elettrici (come le relazioni tensione – corrente) in semplici equazioni polinomiali.

### 3.6.1 Relazione tensione – corrente ai capi di un resistore

L'esempio più semplice di trasformazione di un circuito elettronico è dato dall'analisi della relazione tensione – corrente ai capi di un resistore.



**Figura 9: Resistore nell'ambito temporale**

Nell'ambito temporale, la relazione è espressa dall'equazione polinomiale

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$L$  – Trasformando ambo i membri si ottiene

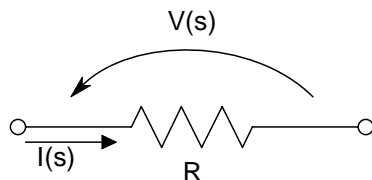
$$L[v(t)] = L[R \cdot i(t)]$$

$$L[v(t)] = R \cdot L[i(t)]$$

$$V(s) = R \cdot I(s)$$

In altre parole,  $L$  – Trasformando la relazione, si ottiene una relazione del tutto simile a quella originale: in particolare, la trasformata della caduta di tensione ai capi del resistore è uguale al valore ohmico del resistore per la trasformata della corrente in circolo.

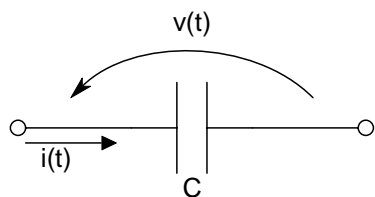
Il circuito equivalente, studiato in ambito di Laplace, risulta quindi essere:



**Figura 10: Resistore nell'ambito complesso**

### 3.6.2 Relazione tensione – corrente ai capi di un condensatore

La trasformata di Laplace inizia ad essere molto utile quando si lavora con componenti discreti in cui la relazione tensione – corrente non è proporzionale come nel caso di un resistore, ma differenziale, ossia legata alla derivata e all'integrale delle grandezze in gioco.



**Figura 11: Condensatore nell'ambito reale**

La relazione tensione – corrente, nell'ambito temporale, è espressa dall'equazione differenziale

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

L – Trasformando ambo i membri dell'equazione si ottiene

$$L[i(t)] = L\left[C \frac{dv(t)}{dt}\right]$$

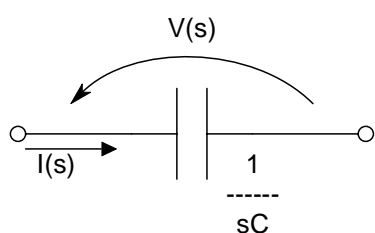
$$L[i(t)] = C \cdot L\left[\frac{dv(t)}{dt}\right]$$

$$I(s) = C(s \cdot V(s)) = sC \cdot V(s)$$

Da cui, riportandosi nella forma classica, si ha

$$I(s) = sC \cdot V(s) \rightarrow V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Come si nota, nell'ambito complesso si può affermare che tensione e corrente sono direttamente proporzionali, così come lo erano nel caso del resistore.



**Figura 12: Condensatore nell'ambito complesso**

E' interessante notare che la relazione trasformata si sarebbe potuta determinare anche partendo dall'espressione della tensione in funzione della corrente; il risultato è identico.

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \rightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$V(s) = \frac{1}{C} \left( \frac{1}{s} I(s) \right) = \frac{1}{sC} I(s)$$

### 3.6.3 Relazione tensione – corrente ai capi di un induttore

Anche nel caso dell'induttore, la trasformata di Laplace muta l'equazione differenziale che lega tensione e corrente in una semplice equazione polinomiale.

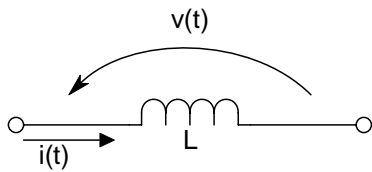


Figura 13: Induttore nell'ambito reale

La relazione è espressa dall'equazione

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

L – Trasformando ambo i membri si ottiene

$$L[v(t)] = L \left[ L \frac{di(t)}{dt} \right]$$

$$V(s) = sL \cdot I(s)$$

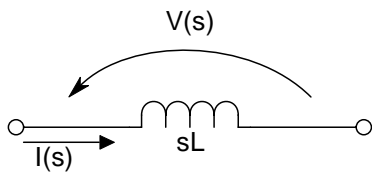


Figura 14: Induttore nell'ambito complesso

Anche l'induttore, quindi, nell'ambito complesso, ha relazione di proporzionalità diretta tra tensione e corrente.

## 3.7 Derivatore ideale

Il circuito **derivatore** è in grado di calcolare la derivata matematica del segnale di ingresso.

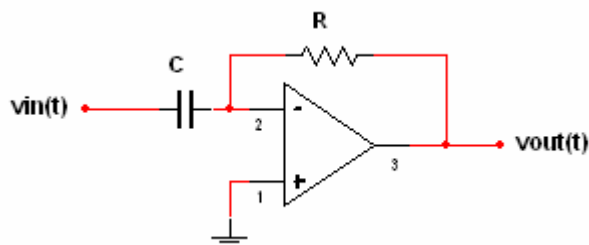


Figura 15: Derivatore ideale

Il circuito può essere analizzato indifferentemente dal punto di vista temporale o dal punto di vista complesso (calcolando il circuito equivalente con la L – Trasformata).

### 3.7.1 Analisi nell'ambito temporale

Per il principio della resistenza d'ingresso dell'amplificatore operazionale, l'ingresso invertente è punto di massa virtuale. Siccome, inoltre, l'amplificatore non assorbe corrente, la corrente in circolo sul condensatore e sul resistore è la medesima. E' quindi possibile calcolare la relazione tra ingresso e uscita mediante la seconda legge di Kirchhoff.

La corrente in circolo sul condensatore (e sul resistore, di conseguenza) vale

$$i(t) = C \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia di retroazione, si ha

$$v_{out}(t) = -R \cdot i(t)$$

da cui

$$v_{out}(t) = -R \cdot C \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

L'uscita quindi è proporzionale alla derivata del segnale di ingresso.

### 3.7.2 Analisi nell'ambito complesso

Per prima cosa si costruisce il circuito equivalente nell'ambito complesso.

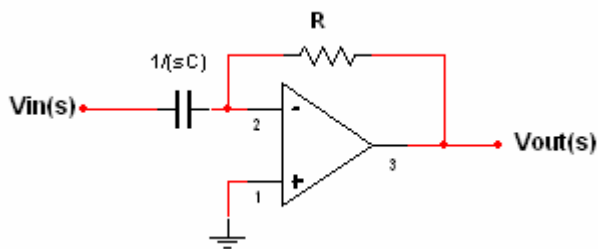


Figura 16: Derivatore nell'ambito complesso

Nell'ambito complesso, il circuito risulta equivalente ad un amplificatore in configurazione invertente. Si ha quindi

$$V_{out}(s) = -\frac{R}{\frac{1}{sC}} V_{in}(s) = -sRC \cdot V_{in}(s)$$

Il guadagno del sistema vale quindi

$$G(s) = -sRC = -\tau \cdot s$$

### 3.7.2 Esempi di utilizzo del derivatore

L'utilizzo del derivatore permette, ad esempio, di generare un segnale ad onda quadra partendo da un'onda triangolare, oppure una continua partendo da un dente di sega. Nel caso di un segnale sinusoidale, l'uscita sarà semplicemente modificata in ampiezza ed in fase.

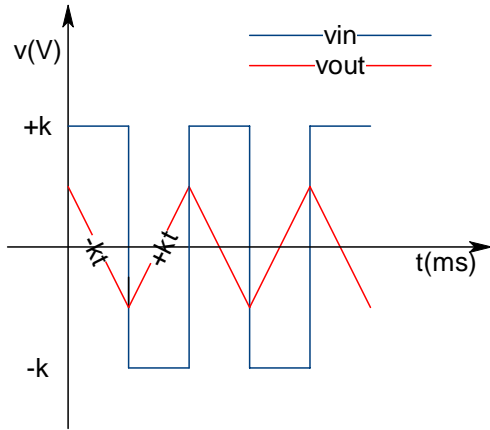


Figura 17: Derivatore con onda triangolare

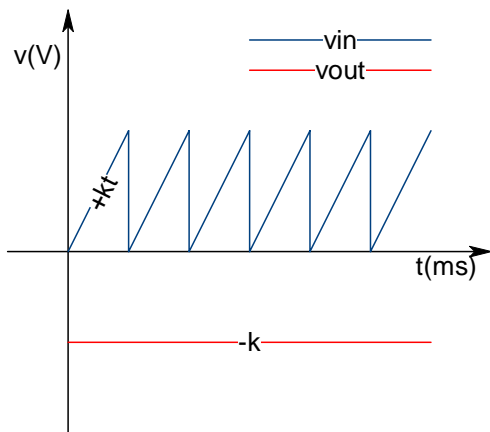


Figura 18: Derivatore con onda a dente di sega

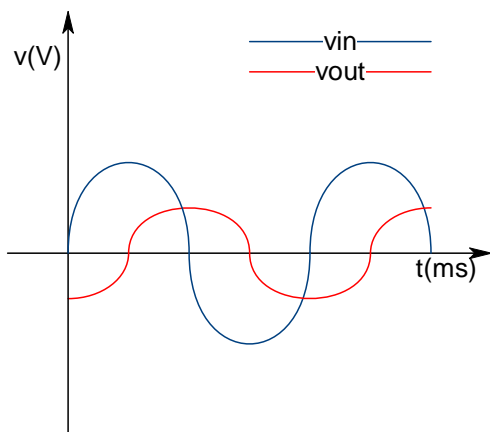


Figura 19: Derivatore con onda sinusoidale

## 3.8 Derivatore reale

Il derivatore include, tra i suoi componenti, un condensatore: lavorando con questo componente discreto, bisogna tener presente che esso ha un comportamento particolare alle alte ed alle basse frequenze.

In particolare, alle alte frequenze il condensatore si comporta come un corto circuito, mentre alle frequenze molto basse si comporta come un circuito aperto.

Quando lavoriamo alle alte frequenze, il circuito risultante è equivalente ad un amplificatore invertente in cui la resistenza all'ingresso invertente è uguale a zero. Si ha quindi guadagno teoricamente infinito. Allo stesso modo si ragiona per le frequenze molto basse, in questo caso il guadagno è nullo.

E' possibile costruire il diagramma di Bode del derivatore reale per osservare meglio la situazione descritta.

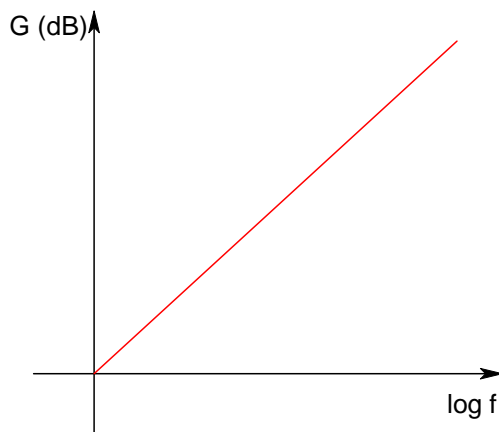


Figura 20: Guadagno del derivatore ideale

Sorge quindi la necessità di limitare il guadagno alle alte frequenze, in modo da non mandare l'amplificatore operazionale in saturazione. Per fare ciò si aggiunge una resistenza in serie al condensatore all'ingresso invertente.

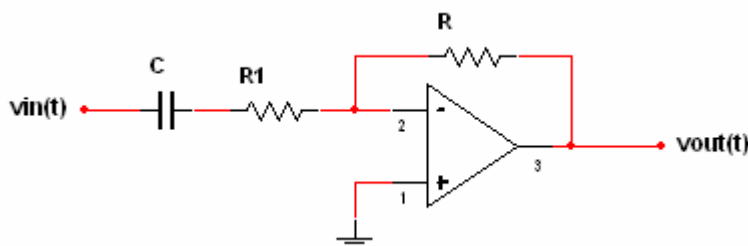


Figura 21: Derivatore reale

Alle alte frequenze, adesso, il condensatore è un corto circuito, ma la resistenza aggiunta contribuisce alla limitazione del guadagno, che in questa situazione diventa uguale a:

$$G = -\frac{R}{R_1}$$

Alle frequenze minori invece si ha un comportamento da derivatore, con guadagno crescente.

La funzione di trasferimento vale:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R}{R_1 + \frac{1}{sC}} = -\frac{sRC}{1 + sR_1C}$$

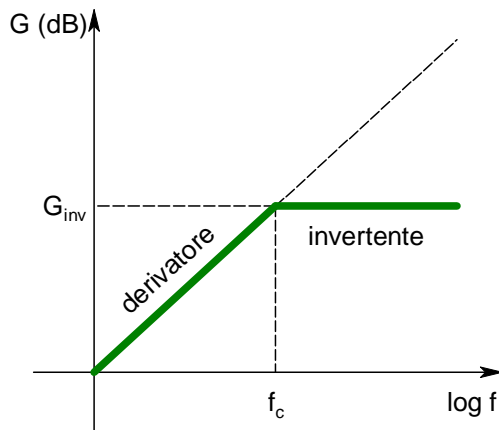


Figura 22: Guadagno del derivatore reale

Si ha in particolare

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

$$G_{inv} = -\frac{R}{R_1}$$

Questo circuito è detto anche **filtro passa – alto**, in quanto le frequenze alte riescono ad attraversarlo in modo costante.

### 3.9 Integratore ideale

Un altro circuito dal comportamento non lineare è il circuito **integratore**, che fornisce in uscita l'integrale del segnale di ingresso. Prendendo in esame gli esempi del derivatore, la situazione sarà opposta: fornendo in entrata un'onda quadra avremo un segnale triangolare, un'onda sinusoidale risulterà sfasata e così via.

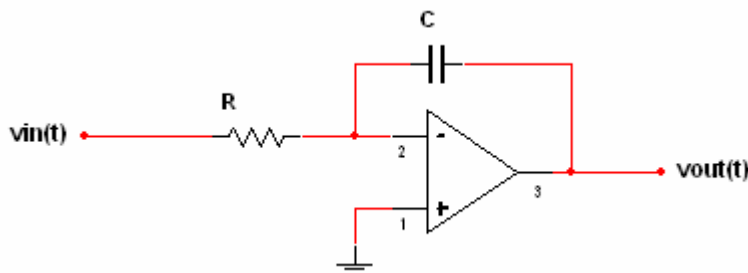


Figura 23: Integratore ideale

### 3.8.1 Analisi nell'ambito temporale

La tensione in uscita è uguale all'opposto di quella sul condensatore:

$$v_{out}(t) = -v_C(t)$$

La legge che vige ai capi del condensatore è

$$i_c(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

da cui, differenziando ed integrando ambo i membri, si ottiene

$$\int i_c(t) dt = \int C \frac{dv_C(t)}{dt} dt$$

$$\int i_c(t) dt = C \int \frac{dv_C(t)}{dt} dt$$

$$\int i_c(t) dt = C \cdot v_C(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt$$

A questo punto dobbiamo ricavare la corrente del circuito (uguale sulla maglia di ingresso e su quella di retroazione) in funzione della tensione di ingresso; per la legge di Kirchhoff applicata alla maglia di ingresso si ha:

$$v_{in}(t) = R \cdot i(t) \rightarrow i(t) = \frac{1}{R} v_{in}(t)$$

Sostituendo nella prima espressione si ha

$$v_{out}(t) = -v_C(t) = -\frac{1}{C} \int i_c(t) dt = -\frac{1}{C} \int \frac{1}{R} v_{in}(t) dt = -\frac{1}{RC} \int v_{in}(t) dt$$

L'uscita è quindi proporzionale all'integrale del segnale di ingresso. Va notato che, anche in questo caso, l'integrale viene cambiato di segno rispetto all'ingresso.

Per calcolare la funzione di trasferimento del sistema, dobbiamo ricorrere all'analisi complessa mediante la trasformata di Laplace.

### 3.7.2 Analisi nell'ambito complesso

Utilizzeremo ora il circuito equivalente dell'integratore ideale per calcolarne la funzione di trasferimento nell'ambito complesso di Laplace.

Come sempre, la prima operazione da svolgere è determinare il circuito equivalente, trasformando i valori dei componenti discreti nei rispettivi componenti trasformati.

Il circuito assume quindi la seguente forma:

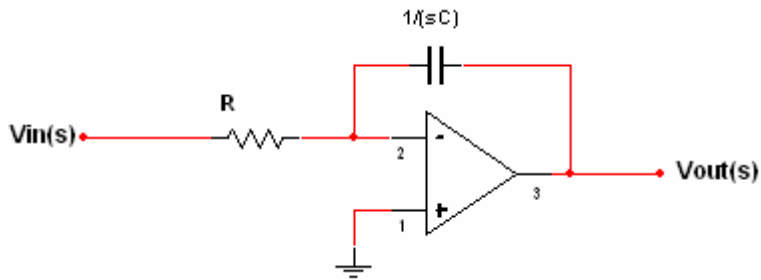


Figura 24: Integratore nell'ambito complesso

Il guadagno del sistema vale:

$$G(s) = -\frac{1}{sC} \frac{1}{R} = -\frac{1}{sRC} = -\frac{1}{s\tau}$$

### 3.10 Integratore reale

Come il derivatore, anche l'integratore soffre di un problema relativo alla frequenza del segnale di ingresso, che porta a particolari comportamenti del condensatore di retroazione.

Alle basse frequenze, il condensatore si comporta come un circuito aperto ed il guadagno è pertanto infinito; alle alte frequenze, il guadagno è invece nullo (il condensatore si comporta come un corto circuito, quindi la sua resistenza equivalente è nulla).

La situazione è quindi inversa rispetto a quella del derivatore.

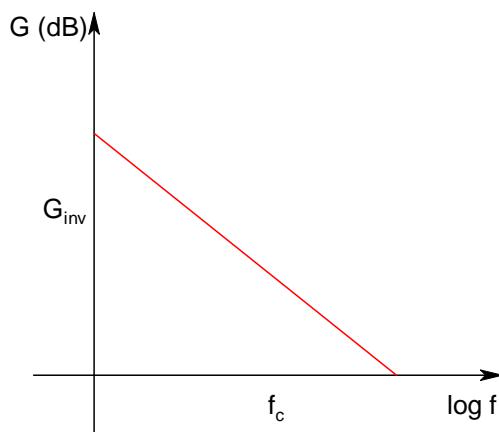


Figura 25: Guadagno dell'integratore ideale

Inoltre l'integratore è sensibile ad eventuali offset, che vengono amplificati notevolmente, traslando il segnale di uscita di molto, anche partendo da offset molto bassi.

Ancora una volta, ci si serve di un resistore, posto questa volta in parallelo al condensatore. In questo modo, quando la resistenza equivalente del condensatore è infinita, il parallelo sarà esattamente uguale al valore della resistenza in parallelo, quindi il guadagno risulterà limitato ad un valore finito.

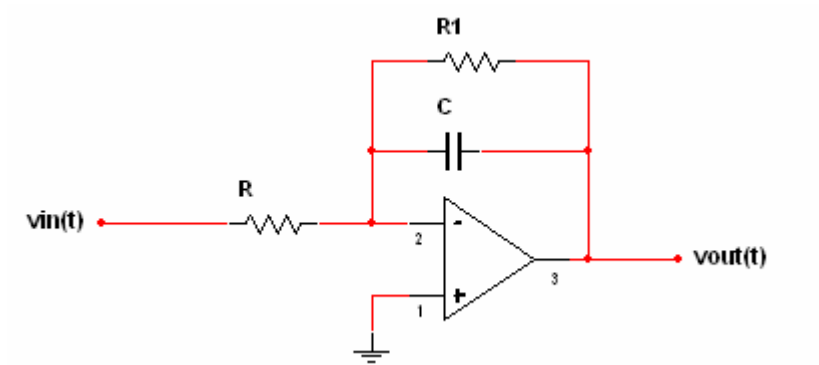


Figura 26: Integratore reale

Il guadagno di questo sistema risulta quindi essere uguale a:

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = - \frac{R_1 // \frac{1}{sC}}{R} = - \frac{R_1 + \frac{1}{sC}}{R} = - \frac{\frac{R_1}{sC} + 1}{R} = - \frac{R_1}{R} \frac{1}{sR_1C + 1}$$

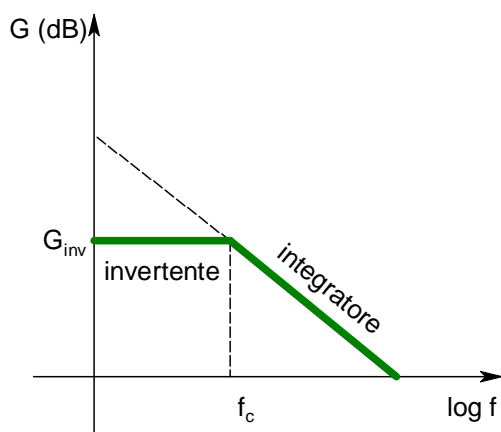


Figura 27: Guadagno dell'integratore reale

Si ha in particolare

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

$$G_{inv} = - \frac{R_1}{R}$$

Questo circuito è detto anche **filtro passa – basso**, in quanto le frequenze alte riescono ad attraversarlo in modo costante.

## 4. Parte pratica

### 4.1 Circuiti integrati per gli Amplificatori Operazionali

In commercio sono presenti diversi integrati contenenti da uno a diversi amplificatori operazionali; di ogni integrato è fondamentale controllare, anzitutto:

- Alimentazione singola o duale
- Numero di amplificatori presenti all'interno
- Massima tensione di alimentazione
- Gestione dell'offset di uscita

Se questi parametri sono corretti per i nostri obiettivi, possiamo passare ad analizzare il datasheet e verificare che anche le altre caratteristiche (larghezza di banda, slew rate, resistenze di ingresso e di uscita) siano adeguate al circuito che vogliamo realizzare. In generale, per le applicazioni più basilari, sarà sufficiente controllare i valori più importanti.

Per quanto riguarda la **tensione di offset di uscita**, alcuni integrati dispongono di un offset regolabile, mediante la costruzione di una semplice rete resistiva variabile all'esterno dell'integrato: sul datasheet dei componenti interessati sono presenti schemi e spiegazioni a riguardo.

Tra i vari amplificatori disponibili in commercio, i più diffusi nelle applicazioni pratiche sono:

- LM358
- TL081
- LF351

### 4.2 Descrizione della prova

La prova consisterà nel testare i parametri caratteristici di un amplificatore operazionale e alcune delle sue più importanti configurazioni.

In particolare, le misurazioni effettuate saranno le seguenti:

1. Misurazione della tensione di offset attraverso un circuito amplificatore in configurazione invertente.
2. Creazione di un circuito con amplificatore invertente a guadagno  $g$  prefissato; testing con cambiamento del segnale sinusoidale di ingresso in ampiezza; frequenza prefissata.
3. Utilizzo del circuito del punto precedente ad ampiezza  $a$  prefissata (tale da non mandare in saturazione l'uscita) e cambiamento del segnale di ingresso in frequenza; analisi della variazione di guadagno a frequenze elevate.
4. Misurazione dello Slew Rate in un circuito inseguitore.
5. Progettazione di un circuito integratore – derivatore ideale e montaggio dei rispettivi circuiti reali; testing di funzionamento.

## 4.3 Analisi dei parametri di base

In questa fase dell'esperienza progetteremo un circuito amplificatore in configurazione invertente, partendo da un guadagno  $g$ , che fissiamo al valore di:

$$g = 8.8$$

Determiniamo quindi il miglior rapporto di resistenze della serie E-24 per ottenere il guadagno desiderato:

$$\frac{R_2}{R_1} = 8.8 \Rightarrow \begin{cases} R_2 = 240k\Omega \\ R_1 = 27k\Omega \end{cases} \Rightarrow G_{\text{effettivo}} = \frac{240}{27} = 8.\bar{8} \cong 8.89$$

Per determinare i valori delle resistenze è stato creato un semplice software di ottimizzazione (*vedere la sezione delle appendici per tutta la descrizione e la codifica in C++ del programma*).

Il circuito da montare è il seguente:

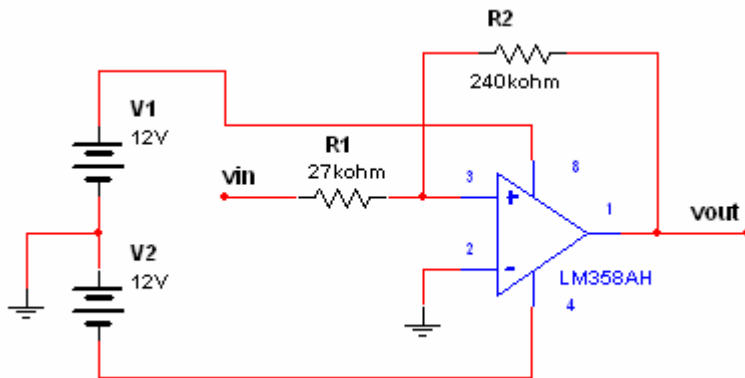


Figura 28: Circuito invertente montato

L'amplificatore utilizzato per questa prova è il LM358.

### 4.3.1 Misurazione dell'offset di uscita

Per misurare la tensione di offset in uscita è sufficiente applicare al circuito appena progettato una tensione di ingresso costante pari a zero. Infatti, l'uscita dell'amplificatore sarà esattamente uguale a:

$$v_{out} = -8.8 \cdot v_{in} + V_{\text{offset}}$$

$$v_{in} = 0 \rightarrow v_{out} = -8.8 \cdot 0 + V_{\text{offset}} = V_{\text{offset}}$$

Per prima cosa osserviamo il datasheet dell'amplificatore utilizzato (LM358) e osserviamo la voce relativa all'offset.

LM358 DATASHEET		Tipico	Massimo
V <sub>OS</sub>	Offset Voltage	R <sub>S</sub> = 0Ω	± 2 mV
		R <sub>S</sub> = 0Ω; over temp.	± 9 mV

Ci aspettiamo quindi di trovare una tensione di uscita di qualche milliVolt, presumibilmente compresa tra 2mV e 7mV. In generale, as-

sumeremo come valore di riferimento i 2mV, considerati *valore tipico* dal costruttore.

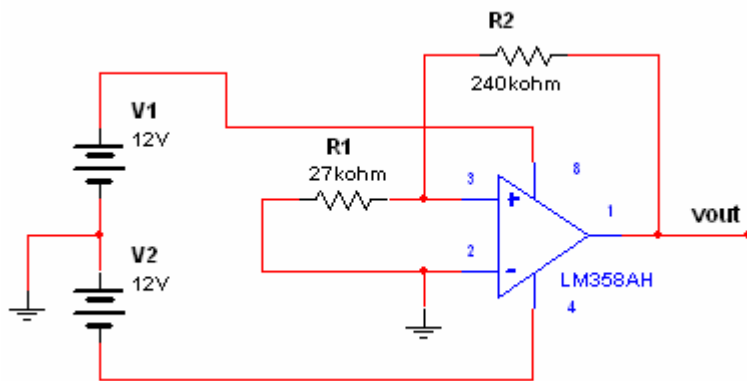


Figura 29: Misurazione dell'offset

Misurazione della tensione di offset		
Valore previsto	Valore misurato	Differenza
2mV	3.8mV	3.8mV - 2mV = 1.8mV

Sebbene il valore misurato sia quasi il doppio di quello tipico, possiamo affermare con sicurezza che il valore è accettabile, per almeno due motivi:

1. In molte applicazioni pratiche, una variazione di 1.8mV è trascurabile (se così non fosse, si provvederà a risolvere il problema in maniera adeguata).
2. Il valore ottenuto è inferiore al valore massimo previsto dal costruttore.

#### 4.3.2 Misura del guadagno variando l'ampiezza

A questo punto forniremo al nostro amplificatore un'onda sinusoidale a frequenza fissa

$$f = 1KHz$$

e ampiezza via via crescente, per misurare di volta in volta la risposta del nostro circuito amplificatore invertente. Determineremo di volta in volta il guadagno e vedremo quando l'amplificatore andrà in saturazione, misurando anche il valore massimo raggiungibile con i 12V di alimentazione.

Come già spiegato, in genere l'uscita massima è esattamente uguale al valore di alimentazione sottratto di circa 1.5V.

Nel nostro caso, quindi, ci aspettiamo una saturazione pari a

$$V_{sat} = 12V - 1.5V = 10.5V$$

E' possibile inoltre calcolare il valore di ingresso che ci porterà alla saturazione:

$$-10.5V = -\frac{240k}{27k} x \rightarrow x = -\frac{10.5 \cdot 27}{240} \cong 1.18V$$

Per valori maggiori di 1.18V, quindi, l'amplificatore andrà in saturazione.

Variazione in ampiezza					
Vin	Vout prevista	Vout reale	Guadagno previsto	Guadagno reale	Errore Guadagno
0,012	0,107	0,100	8,89	8,33	6,25%
0,040	0,356	0,360	8,89	9,00	1,25%
0,100	0,889	0,900	8,89	9,00	1,25%
0,200	1,778	1,780	8,89	8,90	0,13%
0,250	2,222	2,240	8,89	8,96	0,80%
0,300	2,667	2,650	8,89	8,83	0,62%
0,400	3,556	3,560	8,89	8,90	0,13%
0,500	4,444	4,450	8,89	8,90	0,13%
0,600	5,333	5,350	8,89	8,92	0,31%
0,700	6,222	6,250	8,89	8,93	0,45%
0,750	6,667	6,700	8,89	8,93	0,50%
0,800	7,111	7,150	8,89	8,94	0,55%
0,900	8,000	8,000	8,89	8,89	0,00%
1,000	8,889	8,900	8,89	8,90	0,13%
1,100	9,778	9,800	8,89	8,91	0,23%
1,200	10,500	10,500	saturazione	saturazione	---
1,300	10,500	10,500	saturazione	saturazione	---
1,400	10,500	10,500	saturazione	saturazione	---
1,500	10,500	10,500	saturazione	saturazione	---

Nella tabella i dati sono riportati in valore assoluto: il segnale di ingresso è una sinusoide, il segnale di uscita, cambiato di segno, risulterà semplicemente una sinusoide sfasata di 180°. Avendo inserito nella tabella i valori assoluti di tensioni di uscita e guadagno, tuttavia, abbiamo semplificato la comprensione.

Come si nota, gli errori commessi sono tutti molto piccoli: ad eccezione del primo (in cui l'effettivo errore commesso è comunque di 6mV), gli altri errori si mantengono al di sotto dei 2 punti percentuali: per la precisione, la maggior parte degli errori si convergono al di sotto del punto percentuale, alcuni valori risultano anche esattamente uguali a quelli previsti.

Possiamo motivare gli errori tramite le tolleranze dei componenti utilizzati: l'amplificatore ha comunque una tolleranza sul valore di uscita, così come lo hanno le resistenze utilizzate per la creazione della maglia di limitazione del guadagno.

Tutto sommato, i risultati ottenuti sono soddisfacenti.

#### 4.3.3 Misura del guadagno variando la frequenza

La terza prova che è stata svolta è quella di tenere costante l'ampiezza del segnale e verificare la larghezza di banda dell'amplificatore. L'ideale sarebbe riuscire a costruire un grafico simile a quello teorico (in cui si ha un progressivo decadimento del guadagno a frequenze elevate): tuttavia, superata una certa frequenza, l'amplificatore operativo entra in Slew Rate (non riesce a cambiare l'uscita abbastanza repentinamente), pertanto il test perde di significato e non è possibile completare la tabella.

L'ampiezza del segnale è fissata ad un valore in cui l'errore commesso era molto basso:

$$V_{in_M} = 1V$$

Variazione in frequenza						
Vin (V)	Frequenza (Hz)	Vout prevista	Vout reale	Guadagno previsto	Guadagno reale	Errore Guadagno
1,000	100	8,889	8,900	8,89	8,90	0,13%
1,000	200	8,889	8,900	8,89	8,90	0,13%
1,000	1000	8,889	8,900	8,89	8,90	0,13%
1,000	2000	8,889	8,900	8,89	8,90	0,13%
1,000	10000	8,889	8,600	8,89	8,60	3,25%
1,000	20000	8,889	4,000	8,89	4,00	55,00%
1,000	30000	8,889	3,700	8,89	3,70	58,37%
1,000	50000	8,889	3,000	8,89	3,00	66,25%
1,000	100000	8,889	1,600	8,89	1,60	82,00%

Già alla frequenza di 100kHz la misurazione iniziava a perdere di significato, in quanto l'amplificatore entrava in Slew Rate. Tuttavia, anche con i pochi valori accumulati, è possibile osservare l'andamento del guadagno.

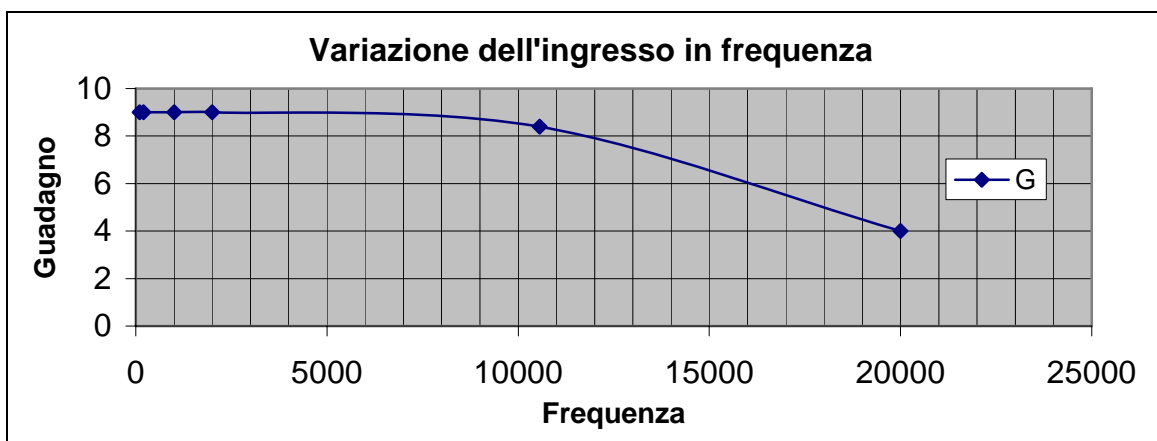


Figura 30: Grafico di variazione del guadagno rispetto alla frequenza

Anche in questo caso possiamo affermare che, pur non avendo potuto testare totalmente la scala di "decadimento" del guadagno, abbiamo verificato ciò che ci eravamo proposti: all'aumentare della frequenza del segnale, si ha un progressivo decadimento della prestazione dell'amplificatore operazionale. Ciò è dovuto ad elementi parassiti che limitano la linearità del componente alle frequenze elevate.

## 4.4 Misura dello Slew Rate

Per misurare lo Slew Rate dell'integrato LM358 ci serviremo di un circuito inseguitore.

Imposteremo l'input come segnale ad onda quadra a frequenza elevata, in modo che l'amplificatore fornisca un'uscita distorta, dopodiché misureremo la variazione dell'uscita in una frazione di tempo, determinando in questo modo il valore dello Slew Rate, che dovrà essere

uguale, nell'ambito degli errori, al valore riportato sul datasheet del componente.

Il valore di Slew Rate riportato sul datasheet è il seguente:

LM358 DATASHEET			Tipico	Massimo
SR	Slew Rate	$T_{amb} = 25^{\circ}C$	$0.3 \text{ V}/\mu\text{s}$	-----

Il segnale di ingresso del circuito inseguire è un'onda quadra a 100kHz, di valore picco – picco pari a 10V.

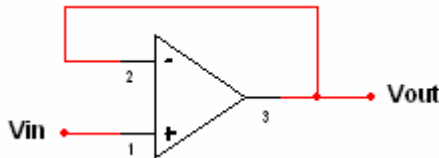


Figura 31: Circuito inseguire per la misura dello Slew Rate

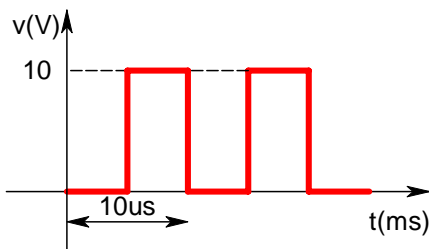


Figura 32: Segnale di ingresso per la misura dello Slew Rate

L'uscita si presenta quindi come un'onda quadra leggermente distorta.

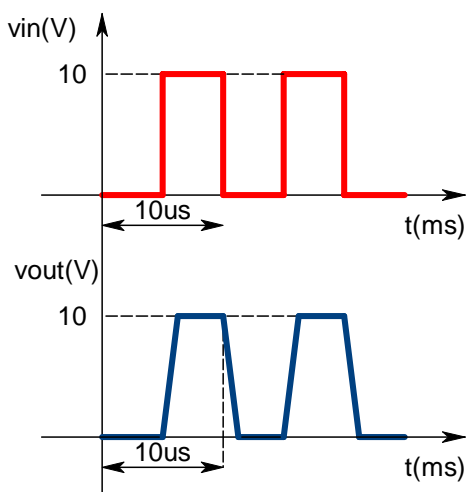


Figura 33: Confronto input-output nell'inseguire

La misura che ci interessa è il tempo che impiega l'operazionale a portare l'uscita a regime, in altre parole dobbiamo misurare la pendenza della retta del segnale in uscita. Siccome alcune capacità parassite alterano leggermente l'andamento della retta nella parte iniziale e finale del suo percorso, è buona norma misurare lo Slew Rate nella parte centrale della retta e non nella sua integrità.

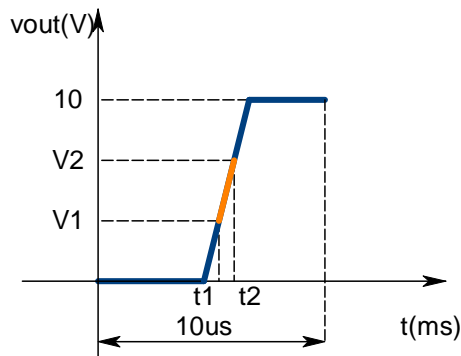


Figura 34: Dettaglio dell'uscita dell'inseguitore

Analizzando l'onda di uscita all'oscilloscopio, si ha che lo Slew Rate è uguale a

$$SR = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V2 - V1}{t2 - t1} \left[ \frac{V}{s} \right]$$

Misurazione dello Slew Rate		
Valore previsto	Valore misurato	Differenza
0.3 V/ $\mu$ s	0.3 V/ $\mu$ s	0

La misura di Slew Rate da noi ottenuta era esattamente uguale a quella del datasheet.

## 4.5 Testing di Derivatore ed Integratore

Questo problema è stato affrontato sia da un punto di vista ideale che da un punto di vista reale.

Dal punto di vista teorico, l'intento era quello di creare un circuito che, data in ingresso un'onda quadra, la integrasse e derivasse in successione, fornendo in uscita nuovamente il segnale identico a quello di partenza. Tuttavia, come è già stato motivato, nella pratica il circuito ideale non può funzionare, a causa delle correnti entranti nell'amplificatore e delle capacità parassite che ne alterano il funzionamento, generando guadagni illimitati e saturazioni immediate.

Quindi, una volta svolti i calcoli teorici, ci siamo limitati ad applicarli nella creazione di due circuiti separati, un integratore ed un derivatore, per verificarne il funzionamento.

Valori di input dell'integratore		
Forma dell'onda	Valore massimo	Frequenza
Quadra	5V	1 kHz
Valori di output dell'integratore/input del derivatore		
Forma dell'onda	Valore massimo	Frequenza
Triangolare	2V	1 kHz
Valori di output del derivatore		
Forma dell'onda	Valore massimo	Frequenza
Quadra	5V	1 kHz

### 4.5.1 Calcoli relativi alla parte dell'integratore

Per prima cosa si calcola il valore dell'uscita in funzione del tempo:

$$v_{in}(t) = 5V$$

$$v_{out}(t) = -\frac{1}{RC} \int v_{in}(t) dt$$

A questo punto sappiamo che, a metà del periodo (quindi a 0.5ms), l'uscita dovrà valere esattamente -2V.

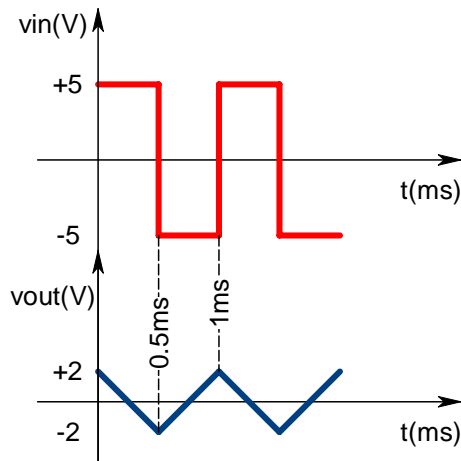


Figura 35: Progettazione dell'integratore

Possiamo quindi scrivere

$$v_{out}(0.5) = -2V$$

$$\int v_{in}(t) = 5t + C$$

$$-2V = -\frac{1}{RC} (5V \cdot 0.5ms)$$

$$\frac{1}{RC} = \frac{2V}{5V \cdot 0.5ms}$$

$$RC = \frac{5V \cdot 0.5ms}{2V} \cong 1.25ms$$

A questo punto, si sceglie il valore commerciale di uno dei due parametri e si ricava il secondo. Generalmente è conveniente fissare a priori il valore del condensatore, visto che in commercio esistono meno valori delle capacità che delle resistenze.

$$C = 10nF \rightarrow R = \frac{1.25ms}{10nF} = 125k\Omega$$

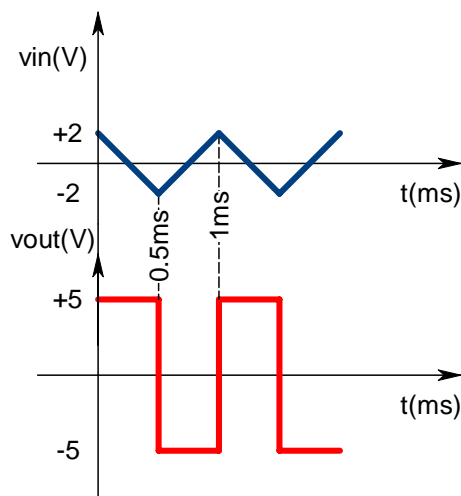
Il valore resistivo più prossimo è 120k $\Omega$ , con il quale si ha un'uscita massima pari a:

$$v_{out}(0.5ms) = -\frac{1}{RC}(5V \cdot 0.5ms) = -\frac{1}{120k\Omega \cdot 10nF}(5V \cdot 0.5ms) \cong -2.08V$$

Stabiliamo che l'errore commesso è accettabile e quindi utilizzeremo questo valore commerciale di resistenza. Se è necessaria una precisione maggiore, è possibile aggiungere in serie alla resistenza da 120kΩ un piccolo trimmer resistivo, per una regolazione ancora più precisa.

#### 4.5.2 Calcoli relativi alla parte del derivatore

A questo punto il segnale dell'uscita precedente deve essere portato in ingresso al derivatore, il quale dovrebbe, in teoria, fornire in uscita il segnale originario.



**Figura 36: Progettazione del derivatore**

L'uscita del derivatore è pari a

$$v_{out}(t) = -R \cdot C \frac{dv_i(t)}{dt}$$

La tensione di ingresso si presenta sotto la forma

$$v_{in}(t) = \begin{cases} -kt & t \in [0, 0.5] + n \\ kt & t \in [0.5, 1] + n \end{cases}$$

Riferendoci alla prima parte del segnale, l'uscita risulta essere:

$$v_{out}(t) = -R \cdot C \frac{dv_i(t)}{dt} = -RC(-k) = RCk \quad t \in [0, 0.5] + n$$

A questo punto è necessario ricavare l'equazione del segnale di ingresso. Trattandosi di una retta, essa si presenterà nella forma

$$y = mx + q$$

che, derivato, ci porterà in uscita semplicemente

$$y' = m \text{ (in precedenza indicato con } k)$$

In una retta, il coefficiente angolare è il rapporto tra la variazione dell'ordinata rispetto alla variazione dell'ascissa, da cui

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2.08 + 2.08)V}{0.5ms} = 8320 \frac{V}{s}$$

A questo punto è possibile ricavare la costante di tempo del sistema:

$$v_{out}(0.5ms) = RCk$$

$$5V = 8320 \cdot RC$$

$$RC = \frac{5}{8320} = 600\mu s$$

Fissato il condensatore, si ottiene il valore della resistenza:

$$C = 150nF$$

$$R = \frac{600\mu s}{150nF} = 4k\Omega$$

Ancora una volta, si può utilizzare una resistenza commerciale da  $3.9k\Omega$  con, se necessario, un trimmer resistivo da  $200\Omega$ .

### 4.5.3 Assemblaggio del circuito ideale

A questo punto è possibile creare il circuito ideale, aggiungendo eventualmente un buffer, realizzato mediante un circuito inseguitore.

Per quanto riguarda gli amplificatori operazionali, abbiamo utilizzato l'integrato TL084, che contiene al suo interno quattro amplificatori operazionali.

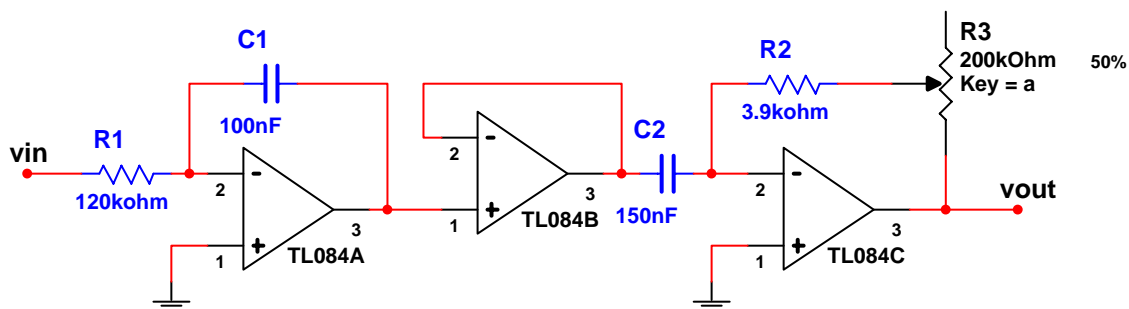


Figura 37: Circuito ideale integratore - derivatore

Come già motivato, tuttavia, il seguente circuito nella pratica ha un funzionamento molto limitato e discontinuo, a causa delle correnti di Bias entranti nell'amplificatore, degli offset sull'ingresso, degli ele-

menti parassiti presenti all'interno dell'amplificatore e, soprattutto, a causa della mancata limitazione del guadagno.

Il nostro obiettivo, quindi, sarà quello di cablare i circuiti derivatore ed integratore reali, e verificare che, effettivamente, essi producano sull'uscita il segnale di ingresso derivato o integrato.

### 4.5.3 Assemblaggio dei circuiti reali

Per quanto riguarda l'integratore reale, è sufficiente aggiungere un resistore in parallelo al condensatore di retroazione: nella pratica, è buona norma inserire questo resistore di un valore ohmico dieci volte più grande di quello dell'altro resistore. In questo modo il guadagno risulterà limitato.

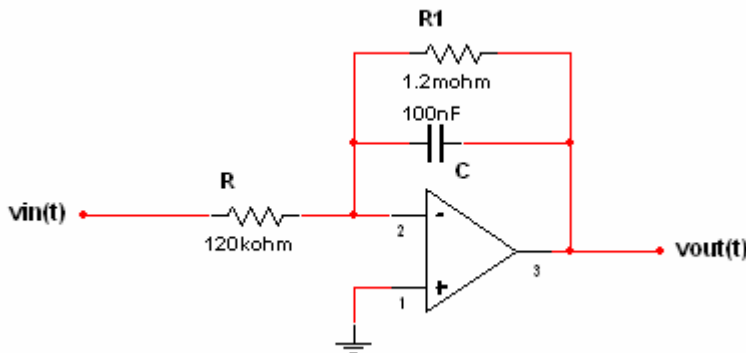


Figura 38: Circuito integratore reale

L'uscita rilevata è, come previsto, di forma triangolare, inoltre l'ampiezza del segnale di uscita diminuisce all'aumentare della frequenza. Per frequenze molto basse, il circuito si comporta come un normale amplificatore invertente.

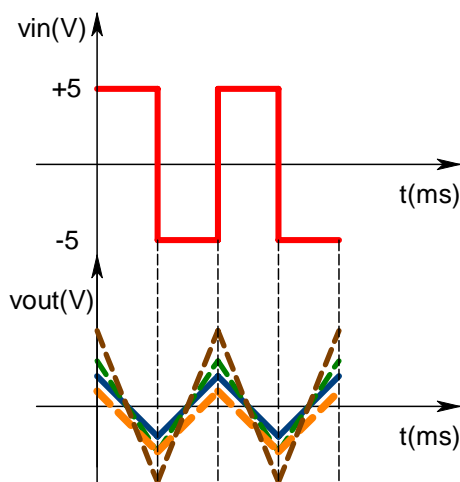
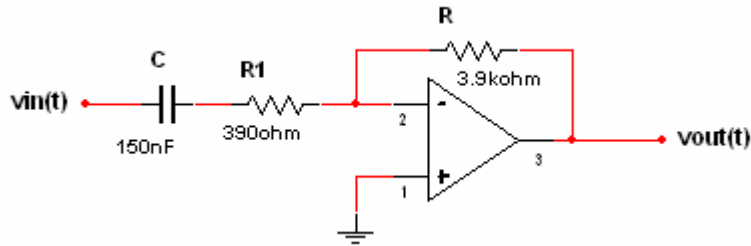


Figura 39: Uscita dell'integratore reale

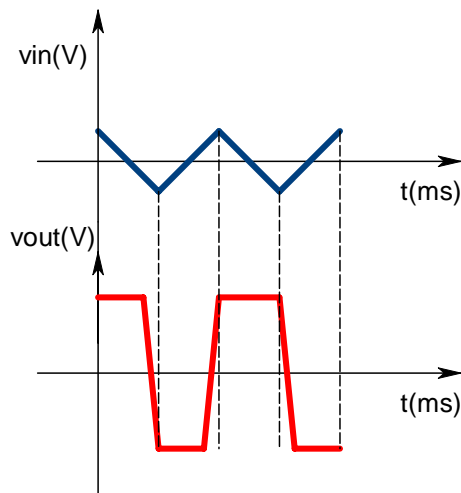
Nel caso del circuito derivatore reale, il discorso è analogo: in questo caso, il resistore aggiunto in serie al condensatore è tenuto generalmente ad un valore ohmico pari ad un decimo di quello dell'altro resistore. Come nel caso precedente, il guadagno sarà limitato, in questo caso per frequenze molto alte.



**Figura 40: Circuito derivatore reale**

Anche in questo caso abbiamo verificato che l'uscita del derivatore, se in ingresso è posta un'onda triangolare, è uguale ad un'onda quadra. L'ampiezza del segnale (modificata dal guadagno dell'amplificatore) è tanto più grande quanto più grande è la frequenza del segnale di ingresso; per frequenze elevate il circuito si comporta come un normale amplificatore invertente con guadagno limitato.

Il segnale in uscita, in effetti, non era esattamente un'onda quadra, ma risultava leggermente distorta nella parti di cambiamento di tensione repentino: il problema è causato da elementi parassiti all'interno dell'amplificatore operazionale. In generale, nella pratica si verifica che l'integratore ha un funzionamento molto più preciso rispetto al derivatore.



**Figura 41: Uscita del derivatore reale**

## 5. Conclusioni

### 5.1 Conclusioni della prova

Con questa prova abbiamo testato il funzionamento degli amplificatori operazionali, reti elettriche in grado di eseguire operazioni matematiche sui segnali di ingresso.

Lo studio delle caratteristiche dell'amplificatore non è stato immediato, così come non lo è stato il montaggio e la verifica dei parametri: è importante precisione nei calcoli e anche nel montaggio, visto che le numerose capacità parassite presenti all'interno degli integrati rischiavano, soprattutto in applicazioni quali derivatore ed integratore, di compromettere il funzionamento del circuito.

La prova ci ha permesso tuttavia di unire concetti pratici già studiati e perfezionati in precedenza, quali la creazione di segnali periodici con il generatore di funzione o lo studio di un'onda attraverso l'oscilloscopio, con altri nuovi da sperimentare, quali la creazione di un circuito amplificatore invertente, derivatore o integratore.

La misurazione dei parametri caratteristici dell'amplificatore, tanto importanti nella pratica, si è conclusa al meglio, ogni dato rispecchiava ciò che era riportato nel datasheet e la rete da noi progettava restituiva i valori da noi attesi.

L'unico problema serio riscontrato è stato nella progettazione e realizzazione dei circuiti di integrazione e derivazione: come già detto, questi due circuiti si servono di componenti non lineari (i condensatori), che rendono i conti più complessi e aggiungono fonti parassite al circuito elettrico. Alla fine dell'esperienza, abbiamo verificato come nella pratica sia impossibile utilizzare l'integratore ideale e il derivatore ideale: questi due circuiti, infatti, forniscono un'uscita completamente satura nella maggior parte delle situazioni.

La verifica dei circuiti derivatore ed integratore reali è stata invece più agevole, tanto che alla fine possiamo affermare che i risultati ottenuti sono quelli da noi attesi: salvo qualche piccola imprecisione dovuta alla tolleranza dei componenti utilizzati, le uscite risultavano davvero essere l'integrale indefinito o la derivata prima del segnale ricevuto in ingresso.

Tramite questa prova, infine, abbiamo preso dimestichezza con la trasformata di Laplace, che permette di analizzare i sistemi caratterizzati da equazioni differenziali tramite equazioni polinomiali fratte, spostando il dominio di riferimento da quello reale a quello complesso.

## 5.2 Trafiletto in inglese

Operational Amplifiers are circuits which provide to solve calculation between electrical signals. This experience serves to us to verify their behaviour and their characteristics.

At the beginning, the study of these circuits was not really easy, and the circuit realization neither. You have to be very accurate in assembling and making the calculations, because of parasite elements inside the circuit.

We also had to use old concepts, studies and verified in the past, such as periodic signals creations with a function generator and periodic signal examine by an oscilloscope.

The measurement of the characteristics was quite simple and clean: we just cabled a non – inverting amplifier circuit and tested the parameters with an oscilloscope. Comparing these values with the data-sheet ones, we saw that our values were correct at all, with only few and very little errors, that we considerate acceptable.

The really big problem got up when we tried to assemble the ideal integrator and the ideal derivator: in fact these two circuits add non linear components (capacitors) to the circuit, and the behaviour was not correct. Our output went in saturation very easily and the result was not the one we were attending for. So we had to add resistors of gain – limitation and we saw that, with only little errors, the circuit outputs were correct. At the end, in fact, we saw that the integrator really gave out the integral of the input, and the derivator gave out the derivate.

Finally, with this experience we learnt how to use Laplace - Transformation in electronic circuits: this powerful instruments allows to transform differential equations into polynomial ones, making the calculation really much easier.

## 6. Appendici

### 6.1 Trasformata di Laplace

Data una funzione

$$f(t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

l'operatore **trasformata di Laplace** genera una nuova funzione in cui le variabili non appartengono all'insieme dei numeri reali, bensì a quello dei numeri complessi.

$$f(t) \xrightarrow{L} F(s) \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}$$

L'operatore trasformato è definito come segue:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}$$

La trasformata gode delle seguenti proprietà:

1) Se esiste, la trasformata di Laplace è unica

2) Linearità dell'operatore trasformato

$$L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] + k_2 L[f_2(t)]$$

3) Trasformata di una derivata

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot L[f(t)] - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$$

4) Trasformata di un integrale

$$L\left[\int f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \cdot L[f(t)] + \frac{f^{-1}(0)}{s} = \frac{1}{s} \cdot F(s) + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

$$f^{-1}(t) = \int f(t) dt$$

5) Teorema del ritardo

$$L[f(x-a)] = e^{-sa} F(s)$$

6) Teorema del cambiamento di scala

$$L[f(ax)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

7) Teorema dello spostamento

$$L[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$$

8) Formula fondamentale della trasformata

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f(s)]$$

La trasformata di Laplace è un operatore lineare, gode pertanto di un operatore inverso, chiamato **antitrasformata**. L'antitrasformata gode delle stesse proprietà della trasformata (eventualmente invertite).

$$f(t) \xrightarrow{L} F(s) \xrightarrow{L^{-1}} f(t)$$

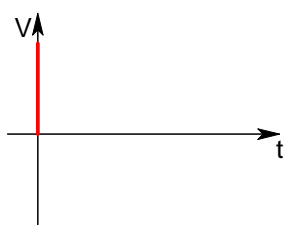
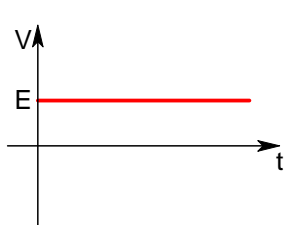
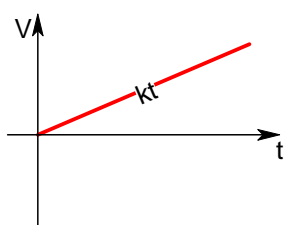
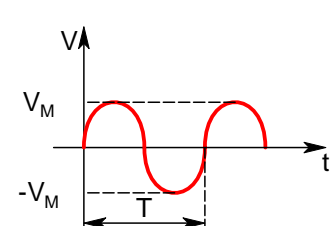
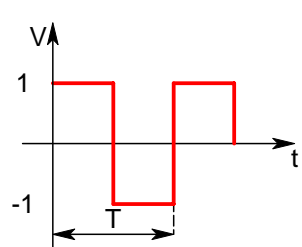
Per il calcolo dell'antitrasformata si ricorre spesso alla teoria dei polinomi, ed è necessario scomporre le funzioni complesse in somme di frazioni semplici, per poi antitrasformarle singolarmente.

Per il calcolo di trasformate ed antitrasformata si ricorre, generalmente, a tabelle predisposte, in cui sono fornite le trasformate delle funzioni più comuni.

Funzione del tempo $f(t)$	Trasformata di Laplace $F(s)$
$\delta(t)$	1
$t$	1
$k$	$\frac{k}{s}$
$kt$	$\frac{k}{s^2}$
$t^2$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$b \cdot e^{-at}$	$\frac{b}{s+a}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{s^n}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

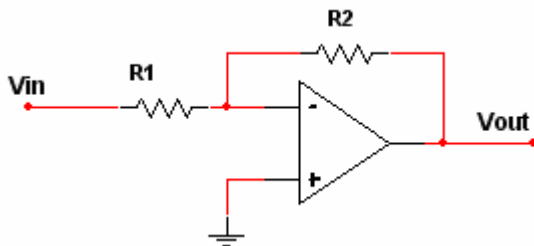
## 6.2 Segnali di prova

I segnali di prova sono quelli utilizzati per testare i circuiti elettronici.

Grafico	Funzione	Trasformata	Nome
	$v(t) = \delta(t)$	$V(s) = 1$	Impulso di Dirac
	$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t \geq 0 \end{cases}$	$V(s) = \frac{E}{s}$	Funzione Gradino
	$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ kt & t \geq 0 \end{cases}$	$V(s) = \frac{k}{s^2}$	Funzione Rampa
	$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_M \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$ $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	$V(s) = V_M \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$	Funzione Sinusoidale
	$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] + kT \\ -1 & t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] + kT \end{cases}$	$V(s) = \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{T}{4}s\right)$	Onda Quadra

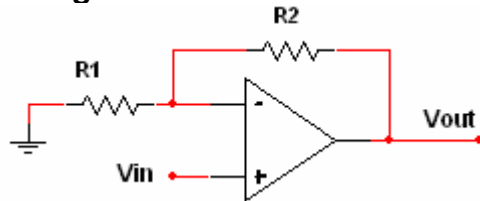
## 6.3 Applicazioni lineari degli amplificatori operazionali

### Configurazione invertente



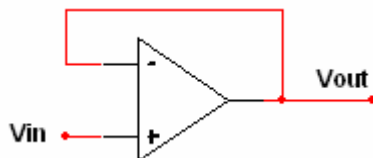
$$V_{OUT} = -\frac{R_2}{R_1} V_{IN}$$

### Configurazione non invertente



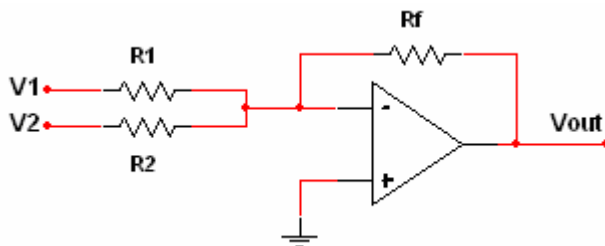
$$V_{OUT} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{IN}$$

### Circuito inseguitore



$$V_{OUT} = V_{IN}$$

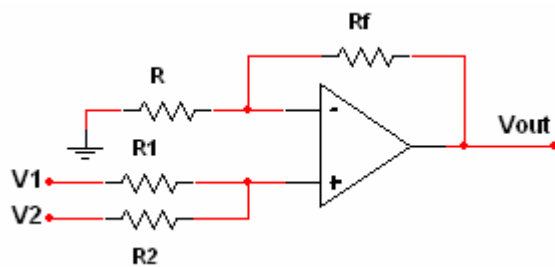
### Sommatore invertente



$$V_{OUT} = -R_f \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \right)$$

$$R_1 = R_2 = R \rightarrow V_{OUT} = -\frac{K}{1}$$

### Sommatore non invertente

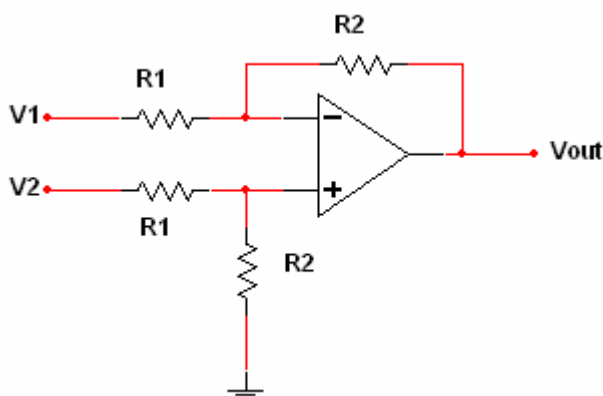


$$R_1 = R_2$$

↓

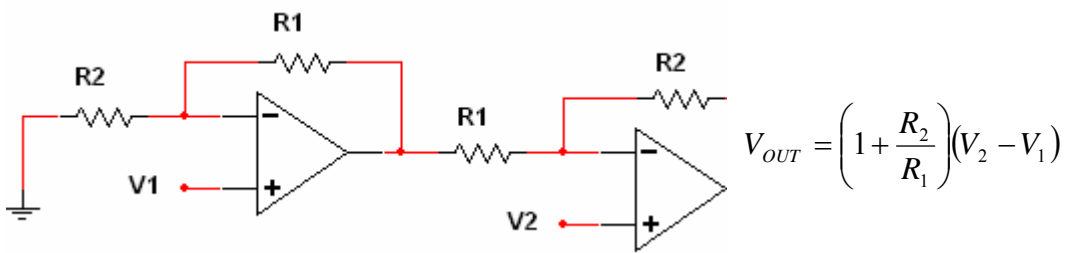
$$V_{OUT} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{R_f}{R} \right) (V_1 + V_2)$$

### Differenziale #01

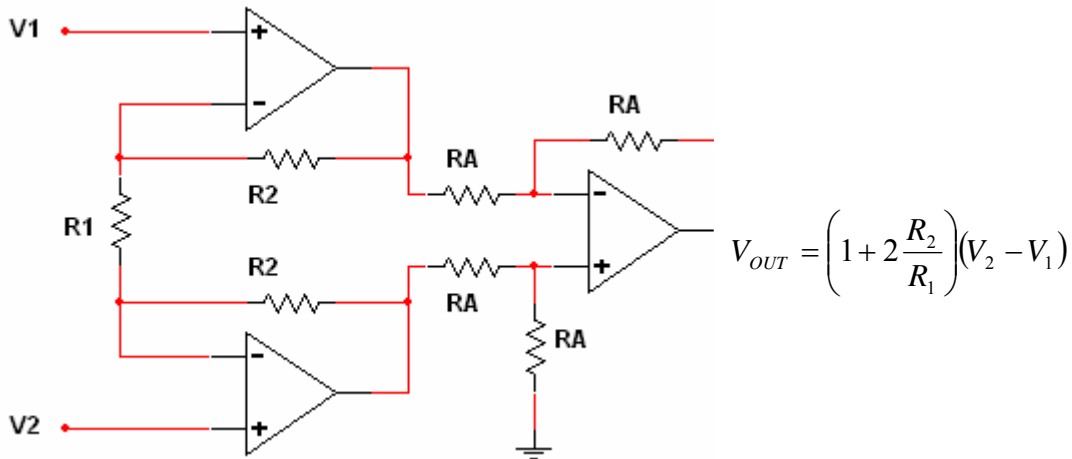


$$V_{OUT} = \frac{R_2}{R_1} (V_2 - V_1)$$

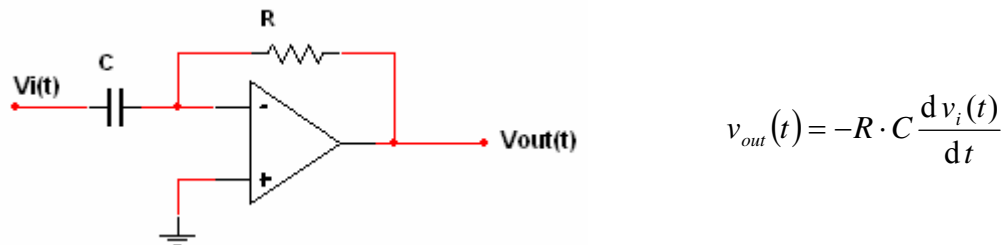
### Differenziale #02



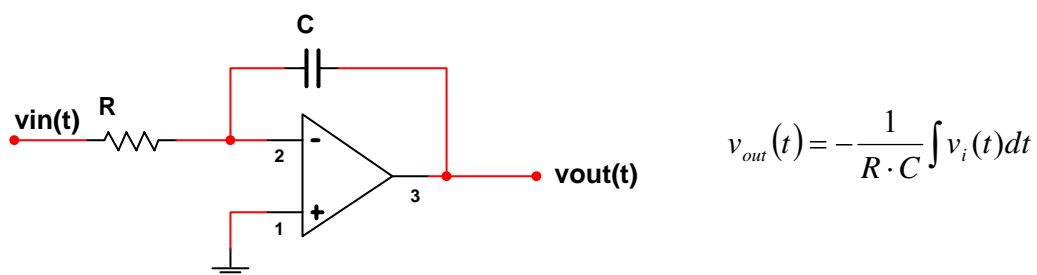
### Differenziale da strumentazione



### Derivatore ideale



### Integratore ideale



## 6.4 Coppia resistiva per guadagni prefissati

Il primo problema che è stato affrontato è quello di determinare la miglior coppia di resistori per ottenere un guadagno prefissato nel montaggio di un amplificatore in configurazione invertente.

L'idea è quella di risolvere il problema da un punto di vista matematico e creare un semplice software in grado di risolvere il problema automaticamente nel minor tempo possibile.

Dato un insieme A

$$A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$$

e un numero  $g$

$$g \in \{x \ni x \in R^+ \wedge x > 1\}$$

ci poniamo come obiettivo quello di determinare la miglior coppia di elementi di A, tali che il loro rapporto sia "vicino" a  $g$ . In altre parole, vogliamo trovare una coppia di valori per cui il rapporto sia il più possibile vicino al numero  $g$ . Questo numero rispecchia il guadagno desiderato: ci siamo concentrati su guadagni positivi e maggiori di uno (nel caso siano minori, sarà sufficiente invertire anche l'ordine dei valori della coppia).

E' presente inoltre un'ulteriore caratteristica: il rapporto non viene cercato solo tra le coppie semplici  $(a_x, a_y)$ , ma anche tra le coppie in cui il secondo valore rimane uguale e il primo è moltiplicato per una qualsiasi potenza di 10. Questa caratteristica ci permette maggiore precisione su valori particolari di  $g$ , infatti alcuni rapporti si ottengono meglio se invece di  $(a_x, a_y)$  la coppia analizzata è  $(10^k a_x, a_y)$ .

L'idea risolutiva di base è quella di prendere tutte le coppie ordinate dell'insieme, calcolare l'esponente da dare a 10 per avere il risultato più prossimo possibile a  $g$  e utilizzare questo valore come *valore migliore per la coppia*. Si otterrà quindi una matrice M di valori ottimi.

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} \text{ dove } m_{ij} = \text{ottimo}(a_i, a_j)$$

Generata questa matrice, una semplice scansione ci permetterà di trovare "il miglior ottimo" e questo sarà il valore più preciso ottenibile.

Per calcolare il miglior ottimo si può utilizzare una seconda matrice di supporto in cui ogni elemento è la distanza dell'ottimo relativo da  $g$ .

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{vmatrix} \text{ dove } s_{ij} = |m_{ij} - g|$$

Per prima cosa analizziamo il problema di trovare l'ottimo relativo ad una coppia  $(a_x, a_y)$ , che individueremo più semplicemente con  $(x, y)$ .

Come detto prima, si tratta di ottimizzare il rapporto

$$\frac{10^n x}{y}$$

rispetto a  $g$ . Notiamo anzitutto che la frazione può essere scritta come

$$\frac{10^n x}{y} = \frac{x}{y} 10^n$$

Quindi, la prima operazione da svolgere, è calcolare il rapporto di base, che indicheremo con  $k$ .

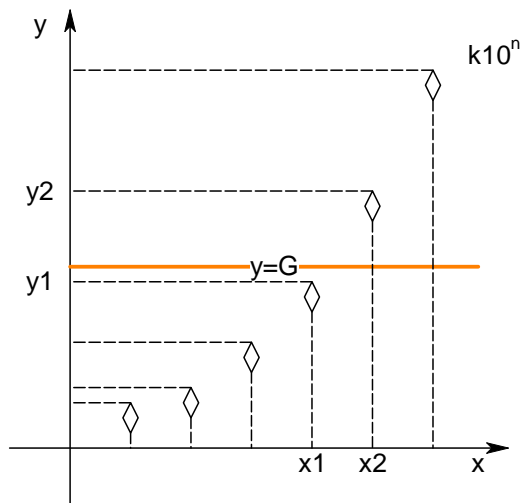
A questo punto bisogna trovare un valore di  $n$ , tale che la rispettiva immagine nella successione

$$A_n = k10^n$$

sia il più possibile vicino a  $g$ .

Riferendoci ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, la successione è rappresentata da una serie di punti isolati, che rispecchiano l'andamento della funzione esponenziale solo per valori interi di  $n$ . Il valore di  $g$ , invece, è individuato da una retta parallela all'asse delle ascisse.

Si avrà quindi una situazione del genere:



La retta di  $g$  è situata in mezzo a due valori della successione,  $x1$  e  $x2$ . In un caso specifico, la retta di  $g$  è a contatto con un punto della successione: è immediato capire che, in questo caso, il valore cercato è ottenuto in modo esatto, senza errore.

Nel primo caso, invece, avremo un valore prossimo a  $g$ : in particolare, uno dei punti  $x1$  e  $x2$  è il punto più prossimo a  $g$ . Per sapere quale dei due punti è il migliore, sarà sufficiente calcolare le due distanze e scegliere quella minore.

$$|g - y1| \text{ e } |g - y2|$$

Definiamo quindi  $ym$

$$ym = \begin{cases} y1 & \text{se } |g - y1| \text{ è ottimo} \\ y2 & \text{se } |g - y2| \text{ è ottimo} \end{cases}$$

A questo punto, il valore ottimo relativo alla coppia  $(x,y)$  è ottenuto esattamente con l'esponente  $ym$  e vale

$$O.R. = \frac{x}{y} 10^{ym}$$

L'algoritmo di ricerca dell'ottimo relativo è quindi il seguente:

```
algoritmo ottimoRelativo (numero x, numero y, numero g)
1. k ← x / y
2. i ← 0
3. while ((k * 10 ^ i) <= g)
    A. i ← i + 1
4. d1 ← |k*10^i - g|
5. d2 ← |k*10^ (i-1) - g|
6. if (d1 < d2)
    A. return i
7. else
    A. return i-1
```

L'algoritmo determina il punto della successione in cui il valore di  $g$  è già stato rispettato. A questo punto l'ottimo relativo sarà posto esattamente in questo punto o in quello precedente.

Una volta riempita la matrice degli ottimi relativi, si determina il valore migliore con una serie di confronti.

Nel programma da me realizzato, l'insieme A comprendeva i valori delle resistenze commerciali della serie E-24, quindi il guadagno  $g$  desiderato veniva ottenuto per resistenze di questa serie. Inoltre è stata aggiunta una funzionalità per il calcolo dei 3 migliori risultati.

#### [C++] Programma di ottimizzazione guadagno

```
#include <cstdlib>
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

struct rapporto {
    float r;
    int exp;
    float diff;
    int i;
    int j;
};
```

```

rapporto mat[24][24];
int dati[] =
{10,11,12,13,15,16,18,20,22,24,27,30,33,36,39,43,47,51,56,62,68,75,82,91};

float exp10 (float b)
{
    float ret = 1;
    for (int i = 0; i < b; ++i)
        ret *= 10;
    return ret;
}

int ottimizza (int a, int b, float avvicina)
{
    float r = (float)a / b;
    int i;
    for (i = 0; r*exp10(i) <= avvicina; ++i);
    float d1 = fabs(r*exp10(i)-avvicina);
    float d2 = fabs(r*exp10(i-1)-avvicina);
    if (d1 < d2)
        return i;
    else
        return i-1;
}

int main(int argc, char *argv[])
{
    float g;

    int exp;
    float r;
    float d;

    char risp;

    int i , j;

    do {

        system ("cls");

        cout << "Guadagno desiderato: ";
        cin >> g;

        for (i = 0; i < 24; ++i)
        {
            for (j = 0; j < 24; ++j)
            {
                exp = ottimizza (dati[i],dati[j],g);
                r = (float)dati[i]/dati[j] * exp10(exp);
                d = fabs(r-g);
                mat[i][j].r = r;
                mat[i][j].exp = exp;
                mat[i][j].diff = d;
                mat[i][j].i = i;
                mat[i][j].j = j;
            }
        }

        // Troviamo le 3 soluzioni migliori
        rapporto best[3];

        best[0] = mat[0][0]; // Soluzione migliore in assoluto
    } while (risp != 'n');
}

```

```

best[1] = mat[0][0];
best[2] = mat[0][0];

for (i = 0; i < 24; ++i)
{
    for (j = 0; j < 24; ++j)
    {
        if (mat[i][j].diff < best[2].diff)
        {
            // Va in classifica
            if (mat[i][j].diff < best[1].diff)
            {
                // Almeno al secondo posto
                if (mat[i][j].diff < best[0].diff)
                {
                    // Primo posto
                    best[2] = best[1];
                    best[1] = best[0];
                    best[0] = mat[i][j];
                }
                else
                {
                    // Secondo posto
                    best[2] = best[1];
                    best[1] = mat[i][j];
                }
            }
            else
            {
                // Terzo posto
                best[2] = mat[i][j];
            }
        }
    }
}

cout << "RISULTATI rapporto R1/R2\a" << endl;

float r1, r2, espo, diffe;
int ii,jj;

// Migliore
ii = best[0].i;
jj = best[0].j;
espo = best[0].exp;
r1 = dati[ii] * exp10 (espo);
r2 = dati[jj];
cout << "1. " << r1 << " / " << r2 << "\t(G = " << r1/r2 << ")";

cout << "\t(Differenza: " << best[0].diff << ")" << endl;

ii = best[1].i;
jj = best[1].j;
espo = best[1].exp;
r1 = dati[ii] * exp10 (espo);
r2 = dati[jj];
cout << "2. " << r1 << " / " << r2 << "\t(G = " << r1/r2 << ")";
cout << "\t(Differenza: " << best[1].diff << ")" << endl;

ii = best[2].i;
jj = best[2].j;
espo = best[2].exp;
r1 = dati[ii] * exp10 (espo);

```



